SOLUZIONI COMPITO del 10/01/2020
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che in quanto combinazione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili e poiché il denominatore è sempre diverso da zero, la funzione proposta è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$. Per verificare il comportamento della funzione nell'origine, consideriamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[5]{(x-4)^2} = \sqrt[5]{16} = f(0)\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(\mathrm{e}^{x^2}-1)}{\sqrt[4]{x^{10}+x^4}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\sqrt[4]{x^4}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{-x} = 0 \neq f(0)\,;$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $t \to 0$, $\sin t \sim t$, con $t = \mathrm{e}^{x^2} - 1 \to 0$ per $x \to 0$, $\mathrm{e}^t - 1 \sim t$, con $t = x^2 \to 0$ per $x \to 0$, e $x^{10} + x^4 \sim x^4$ per $x \to 0$. Pertanto, $x = 0$ è un punto di salto per f e, quindi, mancando la continuità, la funzione non sarà neppure derivabile nell'origine. Invece, nel punto $x = 4$ la funzione è continua, quindi possiamo studiarne la derivabilità. A tal fine osserviamo che

$$f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{(x-4)^3}} \qquad \text{per } x > 0\,,\ x \neq 4\,;$$

pertanto,

$$\lim_{x\to 4^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 4^\pm} \frac{2}{5\sqrt[5]{(x-4)^3}} = \pm\infty\,,$$

e quindi $x = 4$ è un punto di cuspide.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la quantità $\left[2^{(x^2+1)} - 3\right]$ ha segno variabile ed, in particolare, $\left[2^{(x^2+1)} - 3\right] > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{\log_2(3/2)}$ oppure $x > \sqrt{\log_2(3/2)}$. Pertanto, studiamo l'assoluta convergenza applicando il criterio della radice, da cui risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|2^{(x^2+1)} - 3\right|^n}{n^{5/4} + \sqrt[5]{2n} + 3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|2^{(x^2+1)} - 3\right|}{\sqrt[n]{n^{5/4}}} = \left|2^{(x^2+1)} - 3\right| =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{n^{5/4}} = (\sqrt[n]{n})^{5/4} \to 1$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \left|2^{(x^2+1)} - 3\right| < 1$, la serie converge assolutamente, e quindi anche semplicemente. In particolare, la disequazione $\left|2^{(x^2+1)} - 3\right| < 1$ equivale a $-1 < 2^{(x^2+1)} - 3 < 1$, ovvero a $1 < 2^{x^2} < 2$ ed ha per soluzione $-1 < x < 0$ oppure $0 < x < 1$.
2. Se $\ell = \left|2^{(x^2+1)} - 3\right| > 1$, cioè $x < -1$ oppure $x > 1$, la serie non converge assolutamente, ed inoltre il termine n-mo non è infinitesimo, dunque la serie di partenza non converge neppure semplicemente.
3. Se $\ell = \left|2^{(x^2+1)} - 3\right| = 1$, cioè $x = 0; \pm 1$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo $x = 0; \pm 1$ nel modulo della serie proposta si ottiene $\sum \frac{1}{n^{5/4} + \sqrt[5]{2n} + 3}$, che risulta essere una serie convergente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $5/4 > 1$. Pertanto, la serie proposta converge assolutamente e semplicemente anche per $x = 0; \pm 1$.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = \frac{y^4(x)+2}{y^3(x)}\,\frac{1}{x}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che non ha soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{4}\log[y^4(x)+2] = \int \frac{y^3}{y^4+2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C\,,$$

da cui

$$y(x) = \sqrt[4]{\mathrm{e}^{4C}x^4 - 2}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che cerchiamo soluzioni $y(x)$ positive. Imponendo la condizione richiesta, otteniamo

$$3 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{\mathrm{e}^{4C}x^4 - 2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^C x}{x} = \mathrm{e}^C\,, \qquad \Longrightarrow \qquad C = \log 3\,.$$

Pertanto esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale proposta che soddisfa anche la condizione richiesta ed è data da

$$y(x) = \sqrt[4]{81x^4 - 2}\,.$$

Esercizio 4

Per studiare la monotonia e la concavità di f, calcoliamo le sue derivate prima e seconda, utilizzando il teorema di Torricelli. Otteniamo

$$F'(x) = x\exp\left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\,, \qquad F''(x) = \exp\left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right)[1 + x(2x - x^3)] = \exp\left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right)(1 + 2x^2 - x^4)\,.$$

Da ciò ricaviamo che $F'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, $F'(x) < 0$ se e solo se $x < 0$ ed $F'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$; quindi F è decrescente sul semiasse negativo delle ascisse e crescente su quello positivo ($x = 0$ è punto di minimo assoluto). Inoltre, $F''(x) > 0$ se e solo se $(1 + 2x^2 - x^4) > 0$, ovvero $x^2 < 1 + \sqrt{2}$, da cui $-\sqrt{1+\sqrt{2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{2}}$, $F''(x) < 0$ se e solo se $x < -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ oppure $x > \sqrt{1+\sqrt{2}}$ ed $F''(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$; quindi F è concava per $x < -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ oppure $x > \sqrt{1+\sqrt{2}}$ e convessa per $-\sqrt{1+\sqrt{2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{2}}$ ($x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ sono punti di flesso).

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.
   La condizione non è sufficiente, in quanto, ad esempio, la serie armonica $\sum 1/n$ è divergente, nonostante il termine generale sia infinitesimo.
2. L'affermazione 1) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ si ottiene $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n}$ che è una serie divergente.
   L'affermazione 2) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n \equiv 1$ si ottiene $\sum \frac{a_n b_n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ che è una serie divergente.
   L'affermazione 3) è corretta, in quanto per ipotesi esiste $M > 0$ tale che $|a_n|, |b_n| \le M$ da cui si ottiene $\frac{|a_n b_n|}{n^{3/2}} \le \frac{M}{n^{3/2}}$, che è il termine generale di una serie convergente. Quindi la serie proposta converge (addirittura assolutamente) per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$.
   L'affermazione 4) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = \frac{1}{n^2}$ si ottiene $\sum n^2 a_n b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ che è una serie convergente.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che in quanto combinazione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili e poiché il denominatore è sempre diverso da zero, la funzione proposta è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0; -5\}$. Per verificare il comportamento della funzione nell'origine, consideriamo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[7]{(x+5)^3} = \sqrt[7]{125} = f(0)\,,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sqrt[3]{x^9 + x^7}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{(\sin x)^2}{2\sqrt[3]{x^7}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2x^{7/3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2x^{1/3}} = -\infty \neq f(0)\,;$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $t \to 0$, $\cos t - 1 \sim -t^2/2$, con $t = \sin x \to 0$ per $x \to 0$, $\sin x \sim x$, per $x \to 0$, e $x^9 + x^7 \sim x^7$ per $x \to 0$. Pertanto, $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie per f e, quindi, mancando la continuità, la funzione non sarà neppure derivabile nell'origine. Invece, nel punto $x = -5$ la funzione è continua, quindi possiamo studiarne la derivabilità. A tal fine osserviamo che

$$f'(x) = \frac{3}{7\sqrt[7]{(x+5)^4}} \qquad \text{per } x > 0\,,\ x \neq -5\,;$$

pertanto,

$$\lim_{x\to -5^\pm} f'(x) = \lim_{x\to -5^\pm} \frac{3}{7\sqrt[7]{(x+5)^4}} = +\infty\,,$$

e quindi $x = -5$ è un punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la quantità $\left[15 - 5^{(x^2+1)}\right]$ ha segno variabile ed, in particolare, $\left[15 - 5^{(x^2+1)}\right] > 0$ se e solo se $-\sqrt{\log_5 3} < x < \sqrt{\log_5 3}$. Pertanto, studiamo l'assoluta convergenza applicando il criterio della radice, da cui risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|\frac{15-5^{(x^2+1)}}{10}\right|^n}{n^{3/2} + \sqrt[4]{n+3}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{15-5^{(x^2+1)}}{10}\right|}{\sqrt[n]{n^{3/2}}} = \left|\frac{15 - 5^{(x^2+1)}}{10}\right| =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{n^{3/2}} = (\sqrt[n]{n})^{3/2} \to 1$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \left|\frac{15-5^{(x^2+1)}}{10}\right| < 1$, la serie converge assolutamente, e quindi anche semplicemente. In particolare, la disequazione $\left|\frac{15-5^{(x^2+1)}}{10}\right| < 1$ equivale a $-10 < 5^{(x^2+1)} - 15 < 10$, ovvero a $1 < 5^{x^2} < 5$ ed ha per soluzione $-1 < x < 0$ oppure $0 < x < 1$.
2. Se $\ell = \left|\frac{15-5^{(x^2+1)}}{10}\right| > 1$, cioè $x < -1$ oppure $x > 1$, la serie non converge assolutamente, ed inoltre il termine n-mo non è infinitesimo, dunque la serie di partenza non converge neppure semplicemente.
3. Se $\ell = \left|\frac{15-5^{(x^2+1)}}{10}\right| = 1$, cioè $x = 0; \pm 1$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo $x = 0; \pm 1$ nel modulo della serie proposta si ottiene $\sum \frac{1}{n^{3/2} + \sqrt[4]{n+3}}$, che risulta essere una serie convergente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$. Pertanto, la serie proposta converge assolutamente e semplicemente anche per $x = 0; \pm 1$.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = \frac{y^3(x)+1}{y^2(x)} \frac{2}{x}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che ha come soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv -1$ che non soddisfa la condizione richiesta. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{3} \log |y^3(x) + 1| = \int \frac{y^2}{y^3+1}\, dy = 2 \int \frac{1}{x}\, dx = \log (x^2) + C\,,$$

da cui

$$y(x) = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{3C} x^6 - 1}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che cerchiamo soluzioni $y(x)$ positive. Imponendo la condizione richiesta, otteniamo

$$4 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{\mathrm{e}^{3C} x^6 - 1}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^C x^2}{x^2} = \mathrm{e}^C\,, \qquad \Longrightarrow \qquad C = \log 4\,.$$

Pertanto esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale proposta che soddisfa anche la condizione richiesta ed è data da

$$y(x) = \sqrt[3]{64x^6 - 1}\,.$$

Esercizio 4

Per studiare la monotonia e la concavità di f, calcoliamo le sue derivate prima e seconda, utilizzando il teorema di Torricelli. Otteniamo

$$F'(x) = -x \exp\left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\,, \qquad F''(x) = -\exp\left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)[1+x(x^3-2x)] = \exp\left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)(-1+2x^2-x^4)\,.$$

Da ciò ricaviamo che $F'(x) > 0$ se e solo se $x < 0$, $F'(x) < 0$ se e solo se $x > 0$ ed $F'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$; quindi F è crescente sul semiasse negativo delle ascisse e decrescente su quello positivo ($x = 0$ è punto di massimo assoluto). Inoltre, $F''(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, poiché $(-1 + 2x^2 - x^4) = -(x^2 - 1)^2 \leq 0$. Quindi F è sempre concava (e non ci sono punti di flesso).

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.
La condizione non è sufficiente, in quanto, ad esempio, la serie armonica $\sum 1/n$ è divergente, nonostante il termine generale sia infinitesimo.

2. L'affermazione 1) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = \sqrt{n}$ si ottiene $\sum \frac{1}{a_n b_n} = \sum \frac{1}{n}$ che è una serie divergente.
L'affermazione 2) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = 1/n$ si ottiene $\sum \frac{1}{n^2 a_n b_n} = \sum 1$ che è una serie divergente.
L'affermazione 3) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = \frac{1}{n^2}$ si ottiene $\sum n a_n b_n = \sum \frac{1}{n^3}$ che è una serie convergente.
L'affermazione 4) è corretta, in quanto per ipotesi $1/(a_n b_n) \to 0$ da cui si ottiene che, definitivamente, $\frac{1}{n^2 a_n b_n} \leq \frac{1}{n^2}$, che è il termine generale di una serie convergente. Quindi la serie proposta converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che in quanto combinazione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili e poiché il denominatore è sempre diverso da zero, la funzione proposta è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$. Per verificare il comportamento della funzione nell'origine, consideriamo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[7]{(2x+4)^3} = \sqrt[7]{64} = f(0)\,,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\arctan x) - 1}{\sqrt[4]{x^9 + x^{12}}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{(\arctan x)^2}{2\sqrt[4]{x^9}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2x^{9/4}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2x^{1/4}} = -\infty \neq f(0)\,;$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $t \to 0$, $\cos t - 1 \sim -t^2/2$, con $t = \arctan x \to 0$ per $x \to 0$, $\arctan x \sim x$, per $x \to 0$, e $x^9 + x^{12} \sim x^9$ per $x \to 0$. Pertanto, $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie per f e, quindi, mancando la continuità, la funzione non sarà neppure derivabile nell'origine. Invece, nel punto $x = -2$ la funzione è continua, quindi possiamo studiarne la derivabilità. A tal fine osserviamo che

$$f'(x) = \frac{6}{7\sqrt[7]{(2x+4)^4}} \qquad \text{per } x > 0\,,\ x \neq -2\,;$$

pertanto,

$$\lim_{x\to -2^\pm} f'(x) = \lim_{x\to -2^\pm} \frac{6}{7\sqrt[7]{(2x+4)^4}} = +\infty\,,$$

e quindi $x = -2$ è un punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la quantità $\left[10 - 4^{(x^2+1)}\right]$ ha segno variabile ed, in particolare, $\left[10 - 4^{(x^2+1)}\right] > 0$ se e solo se $-\sqrt{\log_4(5/2)} < x < \sqrt{\log_4(5/2)}$. Pertanto, studiamo l'assoluta convergenza applicando il criterio della radice, da cui risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|\frac{10-4^{(x^2+1)}}{6}\right|^n}{n^{7/3} + \sqrt[3]{2n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{10-4^{(x^2+1)}}{6}\right|}{\sqrt[n]{n^{7/3}}} = \left|\frac{10 - 4^{(x^2+1)}}{6}\right| =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{n^{7/3}} = (\sqrt[n]{n})^{7/3} \to 1$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \left|\frac{10-4^{(x^2+1)}}{6}\right| < 1$, la serie converge assolutamente, e quindi anche semplicemente. In particolare, la disequazione $\left|\frac{10-4^{(x^2+1)}}{6}\right| < 1$ equivale a $-6 < 4^{(x^2+1)} - 10 < 6$, ovvero a $1 < 4^{x^2} < 4$ ed ha per soluzione $-1 < x < 0$ oppure $0 < x < 1$.
2. Se $\ell = \left|\frac{10-4^{(x^2+1)}}{6}\right| > 1$, cioè $x < -1$ oppure $x > 1$, la serie non converge assolutamente, ed inoltre il termine n-mo non è infinitesimo, dunque la serie di partenza non converge neppure semplicemente.
3. Se $\ell = \left|\frac{10-4^{(x^2+1)}}{6}\right| = 1$, cioè $x = 0; \pm 1$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo $x = 0; \pm 1$ nel modulo della serie proposta si ottiene $\sum \frac{1}{n^{7/3} + \sqrt[3]{2n+1}}$, che risulta essere una serie convergente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $7/3 > 1$. Pertanto, la serie proposta converge assolutamente e semplicemente anche per $x = 0; \pm 1$.

Esercizio 3
Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = \frac{y^5(x)+1}{y^4(x)} \frac{2}{x}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che ha come soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv -1$ che non soddisfa la condizione richiesta. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{5} \log |y^5(x) + 1| = \int \frac{y^4}{y^5+1}\, dy = 2 \int \frac{1}{x}\, dx = \log (x^2) + C\,,$$

da cui

$$y(x) = \sqrt[5]{e^{5C} x^{10} - 1}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che cerchiamo soluzioni $y(x)$ positive. Imponendo la condizione richiesta, otteniamo

$$2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[5]{e^{5C}x^{10}-1}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^C x^2}{x^2} = e^C\,, \qquad \Longrightarrow \qquad C = \log 2\,.$$

Pertanto esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale proposta che soddisfa anche la condizione richiesta ed è data da

$$y(x) = \sqrt[5]{32x^{10} - 1}\,.$$

Esercizio 4
Per studiare la monotonia e la concavità di f, calcoliamo le sue derivate prima e seconda, utilizzando il teorema di Torricelli. Otteniamo

$$F'(x) = -x \exp\left(x^4 - 2x^2\right)\,, \qquad F''(x) = -\exp\left(x^4 - 2x^2\right)[1 + x(4x^3 - 4x)] = \exp\left(x^4 - 2x^2\right)(-1 + 4x^2 - 4x^4)\,.$$

Da ciò ricaviamo che $F'(x) > 0$ se e solo se $x < 0$, $F'(x) < 0$ se e solo se $x > 0$ ed $F'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$; quindi F è crescente sul semiasse negativo delle ascisse e decrescente su quello positivo ($x = 0$ è punto di massimo assoluto). Inoltre, $F''(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, poiché $(-1 + 4x^2 - 4x^4) = -(2x^2 - 1)^2 \leq 0$. Quindi F è sempre concava (e non ci sono punti di flesso).

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.
   La condizione non è sufficiente, in quanto, ad esempio, la serie armonica $\sum 1/n$ è divergente, nonostante il termine generale sia infinitesimo.
2. L'affermazione 1) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = \sqrt{n}$ si ottiene $\sum \frac{1}{a_n b_n} = \sum \frac{1}{n}$ che è una serie divergente.
   L'affermazione 2) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = 1/n$ si ottiene $\sum \frac{1}{n^2 a_n b_n} = \sum 1$ che è una serie divergente.
   L'affermazione 3) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = \frac{1}{n^2}$ si ottiene $\sum n a_n b_n = \sum \frac{1}{n^3}$ che è una serie convergente.
   L'affermazione 4) è corretta, in quanto per ipotesi $1/(a_n b_n) \to 0$ da cui si ottiene che, definitivamente, $\frac{1}{n^2 a_n b_n} \leq \frac{1}{n^2}$, che è il termine generale di una serie convergente. Quindi la serie proposta converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che in quanto combinazione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili e poiché il denominatore è sempre diverso da zero, la funzione proposta è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Per verificare il comportamento della funzione nell'origine, consideriamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[5]{(x-1)^2} = 1 = f(0)\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin[\log(1+x^4)]}{\sqrt{x^8+x^{12}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\log(1+x^4)}{\sqrt{x^8}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^4}{x^4} = 2 \neq f(0)\,;$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $t \to 0$, $\sin t \sim t$, con $t = \log(1+x^4) \to 0$ per $x \to 0$, $\log(1+t) \sim t$, con $t = x^4 \to 0$ per $x \to 0$, e $x^8 + x^{12} \sim x^8$ per $x \to 0$. Pertanto, $x = 0$ è un punto di salto per f e, quindi, mancando la continuità, la funzione non sarà neppure derivabile nell'origine. Invece, nel punto $x = 1$ la funzione è continua, quindi possiamo studiarne la derivabilità. A tal fine osserviamo che

$$f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{(x-1)^3}} \qquad \text{per } x > 0\,,\ x \neq 1\,;$$

pertanto,

$$\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{2}{5\sqrt[5]{(x-1)^3}} = \pm\infty\,,$$

e quindi $x = 1$ è un punto di cuspide.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la quantità $\left[3^{(x^2+1)} - 6\right]$ ha segno variabile ed, in particolare, $\left[3^{(x^2+1)} - 6\right] > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{\log_3 2}$ oppure $x > \sqrt{\log_3 2}$. Pertanto, studiamo l'assoluta convergenza applicando il criterio della radice, da cui risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|\frac{3^{(x^2+1)}-6}{3}\right|^n}{n^{7/4} + \sqrt[5]{3n+4}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{3^{(x^2+1)}-6}{3}\right|}{\sqrt[n]{n^{7/4}}} = \left|\frac{3^{(x^2+1)}-6}{3}\right| =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{n^{7/4}} = (\sqrt[n]{n})^{7/4} \to 1$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \left|\frac{3^{(x^2+1)}-6}{3}\right| < 1$, la serie converge assolutamente, e quindi anche semplicemente. In particolare, la disequazione $\left|\frac{3^{(x^2+1)}-6}{3}\right| < 1$ equivale a $-3 < 3^{(x^2+1)} - 6 < 3$, ovvero a $1 < 3^{x^2} < 3$ ed ha per soluzione $-1 < x < 0$ oppure $0 < x < 1$.
2. Se $\ell = \left|\frac{3^{(x^2+1)}-6}{3}\right| > 1$, cioè $x < -1$ oppure $x > 1$, la serie non converge assolutamente, ed inoltre il termine n-mo non è infinitesimo, dunque la serie di partenza non converge neppure semplicemente.
3. Se $\ell = \left|\frac{3^{(x^2+1)}-6}{3}\right| = 1$, cioè $x = 0; \pm 1$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo $x = 0; \pm 1$ nel modulo della serie proposta si ottiene $\sum \frac{1}{n^{7/4}+\sqrt[5]{3n+4}}$, che risulta essere una serie convergente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $7/4 > 1$. Pertanto, la serie proposta converge assolutamente e semplicemente anche per $x = 0; \pm 1$.

Esercizio 3
Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = \frac{y^6(x)+5}{y^5(x)} \frac{1}{x}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che non ha soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{6}\log[y^6(x)+5] = \int \frac{y^5}{y^6+5}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C\,,$$

da cui

$$y(x) = \sqrt[6]{e^{6C}x^6 - 5}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che cerchiamo soluzioni $y(x)$ positive. Imponendo la condizione richiesta, otteniamo

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[6]{e^{6C}x^6-5}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^C x}{x} = e^C\,, \qquad \Longrightarrow \qquad C = \log 1 = 0\,.$$

Pertanto esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale proposta che soddisfa anche la condizione richiesta ed è data da

$$y(x) = \sqrt[6]{x^6-5}\,.$$

Esercizio 4
Per studiare la monotonia e la concavità di f, calcoliamo le sue derivate prima e seconda, utilizzando il teorema di Torricelli. Otteniamo

$$F'(x) = x\exp\left(2x^2 - x^4\right)\,, \qquad F''(x) = \exp\left(2x^2-x^4\right)[1 + x(4x-4x^3)] = \exp\left(2x^2-x^4\right)\left(1+4x^2-4x^4\right).$$

Da ciò ricaviamo che $F'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, $F'(x) < 0$ se e solo se $x < 0$ ed $F'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$; quindi F è decrescente sul semiasse negativo delle ascisse e crescente su quello positivo ($x = 0$ è punto di minimo assoluto). Inoltre, $F''(x) > 0$ se e solo se $(1+4x^2-4x^4) > 0$, ovvero $x^2 < (1+\sqrt{2})/2$, da cui $-\sqrt{(1+\sqrt{2})/2} < x < \sqrt{(1+\sqrt{2})/2}$, $F''(x) < 0$ se e solo se $x < -\sqrt{(1+\sqrt{2})/2}$ oppure $x > \sqrt{(1+\sqrt{2})/2}$ ed $F''(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\sqrt{(1+\sqrt{2})/2}$; quindi F è concava per $x < -\sqrt{(1+\sqrt{2})/2}$ oppure $x > \sqrt{(1+\sqrt{2})/2}$ e convessa per $-\sqrt{(1+\sqrt{2})/2} < x < \sqrt{(1+\sqrt{2})/2}$ ($x = \pm\sqrt{(1+\sqrt{2})/2}$ sono punti di flesso).

Esercizio 5
1. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.
   La condizione non è sufficiente, in quanto, ad esempio, la serie armonica $\sum 1/n$ è divergente, nonostante il termine generale sia infinitesimo.
2. L'affermazione 1) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ si ottiene $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n}$ che è una serie divergente.
   L'affermazione 2) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n \equiv 1$ si ottiene $\sum \frac{a_n b_n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ che è una serie divergente.
   L'affermazione 3) è corretta, in quanto per ipotesi esiste $M > 0$ tale che $|a_n|, |b_n| \le M$ da cui si ottiene $\frac{|a_n b_n|}{n^{3/2}} \le \frac{M}{n^{3/2}}$, che è il termine generale di una serie convergente. Quindi la serie proposta converge (addirittura assolutamente) per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$.
   L'affermazione 4) è falsa, in quanto prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = \frac{1}{n^2}$ si ottiene $\sum n^2 a_n b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ che è una serie convergente.