SOLUZIONI COMPITO del 10/02/2016
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Chiaramente una soluzione dell'equazione proposta è $z = 0$. Per $z \neq 0$, utilizzando, ad esempio, la rappresentazione esponenziale $z = re^{i\theta}$, possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma $3r^3 = -r^4 e^{4i\theta} = r^4 e^{i(4\theta+\pi)}$, che conduce al sistema

$$\begin{cases} r^4 = 3r^3\,, \\ 4\theta + \pi = 0 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (\text{poiché } z \neq 0 \implies r \neq 0) \qquad \begin{cases} r = 3\,, \\ \theta = (2k-1)\pi/4\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Pertanto, le soluzioni cercate sono $z = 0$; $\frac{3}{\sqrt{2}} \pm i\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}} \pm i\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 2

Riscriviamo

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n^\alpha + 5}\right)^{\frac{n^{2\alpha}+1}{n-1}} = \exp\left(\frac{n^{2\alpha}+1}{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha + 5}\right)\right).$$

Osserviamo che, per $\alpha < 0$

$$\frac{n^{2\alpha}+1}{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha + 5}\right) \sim \frac{1}{n} \log(1 + 1/5) \to 0\,,$$

per $\alpha = 0$

$$\frac{2}{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{1+5}\right) \sim \frac{2}{n} \log(1 + 1/6) \to 0\,,$$

e per $\alpha > 0$

$$\frac{n^{2\alpha}+1}{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha + 5}\right) \sim \frac{n^{2\alpha}}{n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1; \\ 1 & \text{se } \alpha = 1; \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Pertanto, si ricava

$$a_n \to \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha < 1; \\ \mathrm{e} & \text{se } \alpha = 1; \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Considerando la condizione iniziale, si ricava subito che il problema di Cauchy avrà un'unica soluzione (per ogni $n \in \mathbb{N}$) definita in $(-1, +\infty)$. Tenendo conto che

$$\int \left(-\frac{1}{x+1}\right) dx = -\log(x+1) \qquad \int (2 - 3x^2) e^{-\log(x+1)}\, dx = \int \frac{2 - 3x^2}{x+1}\, dx = -\frac{3}{2}x^2 + 3x - \log(x+1)\,,$$

dove l'ultimo integrale è stato calcolato osservando che

$$\frac{2 - 3x^2}{x+1} = -3\,\frac{x^2 + x - x - 2/3}{x+1} = -3\frac{x(x+1)}{x+1} + 3\frac{x + 1 + 2/3 - 1}{x+1} = -3x + 3 - \frac{1}{x+1}\,,$$

utilizzando la formula risolutiva, ricaviamo l'integrale generale

$$y(x) = Ce^{\log(x+1)} + e^{\log(x+1)}[-\frac{3}{2}x^2 + 3x - \log(x+1)] = (x+1)\left[C - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \log(x+1)\right].$$

Imponendo ora la condizione iniziale, otteniamo

$$0 = y(1/n) = (1/n+1)\left[C - \frac{3}{2n^2} + \frac{3}{n} - \log(1/n+1)\right] \qquad \Longrightarrow \qquad C = 3/2n^2 - 3/n + \log(1/n+1)$$

ovvero

$$y_n(x) = (x+1)\left[\frac{3}{2n^2} - \frac{3}{n} + \log(1/n+1) - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \log(x+1)\right].$$

Infine,

$$\lim_{n\to+\infty} n y_n(2/n) = \lim_{n\to+\infty} n(2/n+1)\left[\frac{3}{2n^2} - \frac{3}{n} + \log(1/n+1) - 12/2n^2 + 6/n - \log(2/n+1)\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{3}{2n^2} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{6}{n} - \frac{2}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{2}{n} - \frac{9}{2n^2}\right] = 2\,.$$

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è continua sull'intervallo $[1,+\infty)$, dobbiamo stabilire solo quale sia il suo comportamento all'infinito. A tal proposito osserviamo che

$$\sqrt[3]{x^2+1} - x^{2/3} = x^{2/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) \sim x^{2/3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2} = \frac{1}{3x^{4/3}} \to 0 \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

dove abbiamo utilizzato che $(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$, per $t \to 0$, con $t = 1/x^2$ e $\alpha = 1/3$. Questo fatto ci permette di affermare che la funzione integranda è definitivamente positiva e, tenendo conto che $\sin t \sim t$, per $t \to 0$, con $t = \sqrt[3]{x^2+1} - x^{2/3}$, ricaviamo

$$\sin(\sqrt[3]{x^2+1} - x^{2/3}) \sim \sqrt[3]{x^2+1} - x^{2/3} \sim \frac{1}{3x^{4/3}}$$

che, per il criterio del confronto asintotico per gli integrali, ci assicura che l'integrale proposto converge, per confronto con l'iperbole di esponente $4/3 > 1$.

Esercizio 5

L'affermazione A) è falsa poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$f(\sqrt{n+\log n}) \sim \frac{1}{(\sqrt{n+\log n})^2} = \frac{1}{n+\log n} \sim \frac{1}{n}\,,$$

e quindi la serie proposta, avendo il termine generale asintotico a quella della serie armonica, diverge. Basta quindi scegliere come controesempio semplicemente $f(x) = 1/x^2 + 2/x^3$.

L'affermazione B) è vera poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$f(\sqrt{n})g(1+\log n) \sim -\frac{1}{(\sqrt{n})^2}\,\frac{1}{(1+\log n)^3} = -\frac{1}{n(\log n)^3}\,,$$

e quindi la serie proposta, avendo il termine generale asintotico a quella della serie di Abel di esponenti $p = 1$ e $q = 3 > 1$, converge.

L'affermazione C) è falsa poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$f(\sqrt{n}) + g(\sqrt[3]{n}) = \frac{1}{(\sqrt{n})^2} + \frac{2}{(\sqrt{n})^3} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{1}{(\sqrt[3]{n})^3} + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)\,,$$

quindi, scegliendo come controesempio, $f(x) = 1/x^2 + 2/x^3$ e $g(x) = -1/x^3 + 1/(x^3\log x)$, si ottiene

$$f(\sqrt{n}) + g(\sqrt[3]{n}) = \frac{1}{(\sqrt{n})^2} + \frac{2}{(\sqrt{n})^3} - \frac{1}{(\sqrt[3]{n})^3} + \frac{1}{(\sqrt[3]{n})^3\log\sqrt[3]{n}} = \frac{2}{n^{3/2}} + \frac{3}{n\log n} \sim \frac{3}{n\log n}\,,$$

che, per confronto con la serie di Abel di esponenti $p = 1 = q$, diverge.

TEMA B

Esercizio 1

Chiaramente una soluzione dell'equazione proposta è $z = 0$. Per $z \neq 0$, utilizzando, ad esempio, la rappresentazione esponenziale $z = re^{i\theta}$, possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma $r^4 = -3r^3 e^{3i\theta} = 3r^3 e^{i(3\theta+\pi)}$, che conduce al sistema

$$\begin{cases} 3r^3 = r^4\,, \\ 3\theta + \pi = 0 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (\text{poiché } z \neq 0 \implies r \neq 0) \qquad \begin{cases} r = 3\,, \\ \theta = (2k-1)\pi/3\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Pertanto, le soluzioni cercate sono $z = 0; -3; \frac{3}{2} \pm i\frac{3\sqrt{3}}{2};$.

Esercizio 2

Riscriviamo

$$a_n := \left(1 - \frac{1}{n^{3\alpha} - 2}\right)^{\frac{n+2}{n^\alpha+3}} = \exp\left(\frac{n+2}{n^\alpha+3}\log\left(1 - \frac{1}{n^{3\alpha}-2}\right)\right).$$

Osserviamo che, per $\alpha < 0$

$$\frac{n+2}{n^\alpha+3}\log\left(1 - \frac{1}{n^{3\alpha}-2}\right) \sim \frac{n}{3}\,\log(1+1/2) \to +\infty\,,$$

per $\alpha = 0$

$$\frac{n+2}{4}\log\left(1+1\right) \sim \frac{n}{4}\,\log(2) \to +\infty\,,$$

e per $\alpha > 0$

$$\frac{n+2}{n^\alpha+3}\log\left(1 - \frac{1}{n^{3\alpha}-2}\right) \sim -\frac{n}{n^\alpha}\,\frac{1}{n^{3\alpha}} = -\frac{1}{n^{4\alpha-1}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1/4; \\ -1 & \text{se } \alpha = 1/4; \\ -\infty & \text{se } \alpha < 1/4. \end{cases}$$

Pertanto, si ricava

$$a_n \to \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 1/4; \\ 1/\mathrm{e} & \text{se } \alpha = 1/4; \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1/4; \\ +\infty & \text{se } \alpha \le 0. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Considerando la condizione iniziale, si ricava subito che il problema di Cauchy avrà un'unica soluzione (per ogni $n \in \mathbb{N}$) definita in $(-1/2, +\infty)$. Tenendo conto che

$$\int\left(\frac{2}{2x+1}\right)dx = \log(2x+1)$$
$$\int\left(4 - \frac{3}{x+1}\right)\mathrm{e}^{\log(2x+1)}\,dx = \int \frac{(4x+1)(2x+1)}{x+1}\,dx = 4x^2 - 2x + 3\log(x+1)\,,$$

dove l'ultimo integrale è stato calcolato osservando che

$$\frac{(4x+1)(2x+1)}{x+1} = \frac{8x^2+6x+1}{x+1} = 8\,\frac{x^2+x-x+3x/4+1/8}{x+1} = 8\frac{x(x+1)}{x+1} - \frac{2x-1}{x+1}$$
$$= 8x - 2\frac{x+1-1-1/2}{x+1} = 8x - 2 + \frac{3}{x+1}\,,$$

utilizzando la formula risolutiva, ricaviamo l'integrale generale

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-\log(2x+1)} + \mathrm{e}^{-\log(2x+1)}[4x^2 - 2x + 3\log(x+1)] = \frac{1}{2x+1}\left[C + 4x^2 - 2x + 3\log(x+1)\right] .$$

Imponendo ora la condizione iniziale, otteniamo

$$0 = y(2/n) = \frac{1}{4/n+1}\left[C + 16/n^2 - 4/n + 3\log(2/n+1)\right] \qquad \Longrightarrow \qquad C = -16/n^2 + 4/n - 3\log(2/n+1)$$

ovvero

$$y_n(x) = \frac{1}{2x+1}\left[-16/n^2 + 4/n - 3\log(2/n+1) + 4x^2 - 2x + 3\log(x+1)\right] .$$

Infine,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(n+1)y_n(1/n) &= \lim_{n\to+\infty} n\frac{1}{2/n+1}\left[-16/n^2 + 4/n - 3\log(2/n+1) + 4/n^2 - 2/n + 3\log(1/n+1)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} n\left[-\frac{16}{n^2} + \frac{4}{n} - 3\frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty} n\left[-\frac{1}{n} - \frac{12}{n^2}\right] = -1 .\end{aligned}$$

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è continua sull'intervallo $[1, +\infty)$, dobbiamo stabilire solo quale sia il suo comportamento all'infinito. A tal proposito osserviamo che

$$\sqrt[3]{x^5+1} - x^{5/3} = x^{5/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^5}} - 1\right) \sim x^{5/3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^5} = \frac{1}{3x^{10/3}} \to 0 \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

dove abbiamo utilizzato che $(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$, per $t \to 0$, con $t = 1/x^5$ e $\alpha = 1/3$. Questo fatto ci permette di affermare che la funzione integranda è definitivamente positiva e, tenendo conto che $\arctan t \sim t$, per $t \to 0$, con $t = \sqrt[3]{x^5+1} - x^{5/3}$, ricaviamo

$$x^3\arctan(\sqrt[3]{x^5+1} - x^{5/3}) \sim x^3(\sqrt[3]{x^5+1} - x^{5/3}) \sim \frac{x^3}{3x^{10/3}} = \frac{1}{3x^{1/3}}$$

che, per il criterio del confronto asintotico per gli integrali, ci assicura che l'integrale proposto diverge, per confronto con l'iperbole di esponente $1/3 < 1$.

Esercizio 5

L'affermazione A) è vera poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$g^2(n+\log n) \sim \left(\frac{2}{n+\log n}\right)^2 \sim \frac{4}{n^2} ,$$

e quindi la serie proposta, avendo il termine generale asintotico a quella della serie armonica generalizzata di esponente $p = 2 > 1$, converge.

L'affermazione B) è falsa poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$g(\sqrt{n}) - f(\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(\sqrt{n})^3} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) ,$$

quindi, scegliendo come controesempio, $f(x) = 2/x - 1/x^2$ e $g(x) = 2/x + 1/x^3$, si ottiene

$$g(\sqrt{n}) - f(\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(\sqrt{n})^3} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(\sqrt{n})^2} = \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

che, per confronto con la serie armonica, diverge.

L'affermazione C) è vera poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$f(n\log n)g(1+\sqrt{n}) \sim \frac{2}{n\log n}\,\frac{2}{1+\sqrt{n}} = \frac{4}{n^{3/2}\log n} ,$$

e quindi la serie proposta, avendo il termine generale asintotico a quella della serie di Abel di esponenti $p = 3/2 > 1$ e $q = 1$, converge.

TEMA C

Esercizio 1

Chiaramente una soluzione dell'equazione proposta è $z = 0$. Per $z \neq 0$, utilizzando, ad esempio, la rappresentazione esponenziale $z = re^{i\theta}$, possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma $3r^4 = -r^3 e^{3i\theta} = r^3 e^{i(3\theta+\pi)}$, che conduce al sistema

$$\begin{cases} r^3 = 3r^4\,, \\ 3\theta + \pi = 0 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (\text{poiché } z \neq 0 \implies r \neq 0) \qquad \begin{cases} r = 1/3\,, \\ \theta = (2k-1)\pi/3\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Pertanto, le soluzioni cercate sono $z = 0; -\frac{1}{3}; \frac{1}{6} \pm i\frac{\sqrt{3}}{6};$.

Esercizio 2

Riscriviamo

$$a_n := \left(1 - \frac{1}{n^{2\alpha} - 3}\right)^{\frac{n^2+2}{n^{4\alpha}+4}} = \exp\left(\frac{n^2+2}{n^{4\alpha}+4} \log\left(1 - \frac{1}{n^{2\alpha}-3}\right)\right).$$

Osserviamo che, per $\alpha < 0$

$$\frac{n^2+2}{n^{4\alpha}+4} \log\left(1 - \frac{1}{n^{2\alpha}-3}\right) \sim \frac{n^2}{4} \log(1 + 1/3) \to +\infty\,,$$

per $\alpha = 0$

$$\frac{n^2+2}{5} \log\left(1 - \frac{1}{1-3}\right) \sim \frac{n^2}{5} \log(1 + 1/2) \to +\infty\,,$$

e per $\alpha > 0$

$$\frac{n^2+2}{n^{4\alpha}+4} \log\left(1 - \frac{1}{n^{2\alpha}-3}\right) \sim -\frac{n^2}{n^{4\alpha}} \frac{1}{n^{2\alpha}} = -\frac{1}{n^{6\alpha-2}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1/3; \\ -1 & \text{se } \alpha = 1/3; \\ -\infty & \text{se } \alpha < 1/3. \end{cases}$$

Pertanto, si ricava

$$a_n \to \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 1/3; \\ 1/\mathrm{e} & \text{se } \alpha = 1/3; \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1/3; \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Considerando la condizione iniziale, si ricava subito che il problema di Cauchy avrà un'unica soluzione (per ogni $n \in \mathbb{N}$) definita in $(-1/4, +\infty)$. Tenendo conto che

$$\int \left(\frac{4}{4x+1}\right) dx = \log(4x+1)$$
$$\int \left(3 - \frac{2}{x+1}\right) \mathrm{e}^{\log(4x+1)}\, dx = \int \frac{(4x+1)(3x+1)}{x+1}\, dx = 6x^2 - 5x + 6\log(x+1)\,,$$

dove l'ultimo integrale è stato calcolato osservando che

$$\frac{(4x+1)(3x+1)}{x+1} = \frac{12x^2+7x+1}{x+1} = 12\,\frac{x^2 + x - x + 7x/12 + 1/12}{x+1} = 12\frac{x(x+1)}{x+1} - \frac{5x-1}{x+1}$$
$$= 12x - 5\frac{x+1-1-1/5}{x+1} = 12x - 5 + \frac{6}{x+1}\,,$$

utilizzando la formula risolutiva, ricaviamo l'integrale generale

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-\log(4x+1)} + \mathrm{e}^{-\log(4x+1)}[6x^2 - 5x + 6\log(x+1)] = \frac{1}{4x+1}\left[C + 6x^2 - 5x + 6\log(x+1)\right] .$$

Imponendo ora la condizione iniziale, otteniamo

$$0 = y(1/n) = \frac{1}{4/n+1}\left[C + 6/n^2 - 5/n + 6\log(1/n+1)\right] \qquad \Longrightarrow \qquad C = -6/n^2 + 5/n - 6\log(1/n+1)$$

ovvero

$$y_n(x) = \frac{1}{4x+1}\left[-6/n^2 + 5/n - 6\log(1/n+1) + 6x^2 - 5x + 6\log(x+1)\right] .$$

Infine,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(3n+1)y_n(2/n) &= \lim_{n\to+\infty} 3n\frac{1}{8/n+1}\left[-6/n^2 + 5/n - 6\log(1/n+1) + 24/n^2 - 10/n + 6\log(2/n+1)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} 3n\left[-\frac{6}{n^2} + \frac{5}{n} - 6\frac{1}{n} + \frac{24}{n^2} - \frac{10}{n} + 6\frac{2}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty} 3n\left[\frac{1}{n} + \frac{18}{n^2}\right] = 3 .\end{aligned}$$

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è continua sull'intervallo $[1, +\infty)$, dobbiamo stabilire solo quale sia il suo comportamento all'infinito. A tal proposito osserviamo che

$$\sqrt[5]{x^3+1} - x^{3/5} = x^{3/5}\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^3}} - 1\right) \sim x^{3/5}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{x^3} = \frac{1}{5x^{12/5}} \to 0 \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

dove abbiamo utilizzato che $(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$, per $t \to 0$, con $t = 1/x^3$ e $\alpha = 1/5$. Questo fatto ci permette di affermare che la funzione integranda è definitivamente positiva e, tenendo conto che $\arctan t \sim t$, per $t \to 0$, con $t = \sqrt[5]{x^3+1} - x^{3/5}$, ricaviamo

$$x^2\arctan(\sqrt[5]{x^3+1} - x^{3/5}) \sim x^2(\sqrt[5]{x^3+1} - x^{3/5}) \sim \frac{x^2}{5x^{12/5}} = \frac{1}{5x^{2/5}}$$

che, per il criterio del confronto asintotico per gli integrali, ci assicura che l'integrale proposto diverge, per confronto con l'iperbole di esponente $2/5 < 1$.

Esercizio 5

L'affermazione A) è vera poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$g^2(n + \log n) \sim \left(\frac{2}{n+\log n}\right)^2 \sim \frac{4}{n^2} ,$$

e quindi la serie proposta, avendo il termine generale asintotico a quella della serie armonica generalizzata di esponente $p = 2 > 1$, converge.

L'affermazione B) è falsa poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$g(\sqrt{n}) - f(\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(\sqrt{n})^3} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) ,$$

quindi, scegliendo come controesempio, $f(x) = 2/x - 1/x^2$ e $g(x) = 2/x + 1/x^3$, si ottiene

$$g(\sqrt{n}) - f(\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(\sqrt{n})^3} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(\sqrt{n})^2} = \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

che, per confronto con la serie armonica, diverge.

L'affermazione C) è vera poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$f(n\log n)g(1+\sqrt{n}) \sim \frac{2}{n\log n}\,\frac{2}{1+\sqrt{n}} = \frac{4}{n^{3/2}\log n} ,$$

e quindi la serie proposta, avendo il termine generale asintotico a quella della serie di Abel di esponenti $p = 3/2 > 1$ e $q = 1$, converge.

TEMA D

Esercizio 1

Chiaramente una soluzione dell'equazione proposta è $z = 0$. Per $z \neq 0$, utilizzando, ad esempio, la rappresentazione esponenziale $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma $r^3 = -3r^4\mathrm{e}^{4i\theta} = 3r^4\mathrm{e}^{i(4\theta+\pi)}$, che conduce al sistema

$$\begin{cases} 3r^4 = r^3\,, \\ 4\theta + \pi = 0 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (\text{poiché } z \neq 0 \implies r \neq 0) \qquad \begin{cases} r = 1/3\,, \\ \theta = (2k-1)\pi/4\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Pertanto, le soluzioni cercate sono $z = 0$; $\frac{1}{3\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Esercizio 2

Riscriviamo

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n^{2\alpha}+4}\right)^{\frac{n^{3\alpha}+2}{n^2+1}} = \exp\left(\frac{n^{3\alpha}+2}{n^2+1}\log\left(1 + \frac{1}{n^{2\alpha}+4}\right)\right).$$

Osserviamo che, per $\alpha < 0$

$$\frac{n^{3\alpha}+2}{n^2+1}\log\left(1 + \frac{1}{n^{2\alpha}+4}\right) \sim \frac{2}{n^2}\log(1+1/4) \to 0\,,$$

per $\alpha = 0$

$$\frac{3}{n^2+1}\log\left(1 + \frac{1}{1+4}\right) \sim \frac{3}{n^2}\log(1+1/5) \to 0\,,$$

e per $\alpha > 0$

$$\frac{n^{3\alpha}+2}{n^2+1}\log\left(1 + \frac{1}{n^{2\alpha}+4}\right) \sim \frac{n^{3\alpha}}{n^2}\frac{1}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n^{2-\alpha}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2; \\ 1 & \text{se } \alpha = 2; \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Pertanto, si ricava

$$a_n \to \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha < 2; \\ \mathrm{e} & \text{se } \alpha = 2; \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Considerando la condizione iniziale, si ricava subito che il problema di Cauchy avrà un'unica soluzione (per ogni $n \in \mathbb{N}$) definita in $(-1, +\infty)$. Tenendo conto che

$$\int \left(-\frac{1}{x+1}\right) dx = -\log(x+1) \qquad \int (1-4x^2)\mathrm{e}^{-\log(x+1)}\,dx = \int \frac{1-4x^2}{x+1}\,dx = -2x^2 + 4x - 3\log(x+1)\,,$$

dove l'ultimo integrale è stato calcolato osservando che

$$\frac{1-4x^2}{x+1} = -4\,\frac{x^2+x-x-1/4}{x+1} = -4\frac{x(x+1)}{x+1} + 4\frac{x+1+1/4-1}{x+1} = -4x + 4 - \frac{3}{x+1}\,,$$

utilizzando la formula risolutiva, ricaviamo l'integrale generale

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\log(x+1)} + \mathrm{e}^{\log(x+1)}[-2x^2 + 4x - 3\log(x+1)] = (x+1)\left[C - 2x^2 + 4x - 3\log(x+1)\right].$$

Imponendo ora la condizione iniziale, otteniamo

$$0 = y(2/n) = (2/n+1)\left[C - 8/n^2 + 8/n - 3\log(2/n+1)\right] \qquad \Longrightarrow \qquad C = 8/n^2 - 8/n + 3\log(2/n+1)$$

ovvero

$$y_n(x) = (x+1)\left[8/n^2 - 8/n + 3\log(2/n+1) - 2x^2 + 4x - 3\log(x+1)\right].$$

Infine,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} 2ny_n(1/n) &= \lim_{n\to+\infty} 2n(1/n+1)\left[8/n^2 - 8/n + 3\log(2/n+1) - 2/n^2 + 4/n - 3\log(1/n+1)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2n\left[\frac{8}{n^2} - \frac{8}{n} + 3\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} - 3\frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty} 2n\left[-\frac{1}{n} + \frac{6}{n^2}\right] = -2\,. \end{aligned}$$

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è continua sull'intervallo $[1, +\infty)$, dobbiamo stabilire solo quale sia il suo comportamento all'infinito. A tal proposito osserviamo che

$$\sqrt[4]{x^3+1} - x^{3/4} = x^{3/4}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^3}} - 1\right) \sim x^{3/4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{x^3} = \frac{1}{4x^{9/4}} \to 0 \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

dove abbiamo utilizzato che $(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$, per $t \to 0$, con $t = 1/x^3$ e $\alpha = 1/4$. Questo fatto ci permette di affermare che la funzione integranda è definitivamente positiva e, tenendo conto che $\sin t \sim t$, per $t \to 0$, con $t = \sqrt[4]{x^3+1} - x^{3/4}$, ricaviamo

$$\sin(\sqrt[4]{x^3+1} - x^{3/4}) \sim \sqrt[4]{x^3+1} - x^{3/4} \sim \frac{1}{4x^{9/4}}$$

che, per il criterio del confronto asintotico per gli integrali, ci assicura che l'integrale proposto converge, per confronto con l'iperbole di esponente $9/4 > 1$.

Esercizio 5

L'affermazione $A)$ è falsa poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$f(\sqrt{n+\log n}) \sim \frac{1}{(\sqrt{n+\log n})^2} = \frac{1}{n+\log n} \sim \frac{1}{n}\,,$$

e quindi la serie proposta, avendo il termine generale asintotico a quella della serie armonica, diverge. Basta quindi scegliere come controesempio semplicemente $f(x) = 1/x^2 + 2/x^3$.

L'affermazione $B)$ è vera poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$f(\sqrt{n})g(1+\log n) \sim -\frac{1}{(\sqrt{n})^2}\,\frac{1}{(1+\log n)^3} = -\frac{1}{n(\log n)^3}\,,$$

e quindi la serie proposta, avendo il termine generale asintotico a quella della serie di Abel di esponenti $p = 1$ e $q = 3 > 1$, converge.

L'affermazione $C)$ è falsa poiché, per le ipotesi fatte, si ha che

$$f(\sqrt{n}) + g(\sqrt[3]{n}) = \frac{1}{(\sqrt{n})^2} + \frac{2}{(\sqrt{n})^3} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{1}{(\sqrt[3]{n})^3} + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)\,,$$

quindi, scegliendo come controesempio, $f(x) = 1/x^2 + 2/x^3$ e $g(x) = -1/x^3 + 1/(x^3 \log x)$, si ottiene

$$f(\sqrt{n}) + g(\sqrt[3]{n}) = \frac{1}{(\sqrt{n})^2} + \frac{2}{(\sqrt{n})^3} - \frac{1}{(\sqrt[3]{n})^3} + \frac{1}{(\sqrt[3]{n})^3 \log \sqrt[3]{n}} = \frac{2}{n^{3/2}} + \frac{3}{n\log n} \sim \frac{3}{n\log n}\,,$$

che, per confronto con la serie di Abel di esponenti $p = 1 = q$, diverge.