SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = xy - 2x$, e passando poi in coordinate polari centrate nel punto $(0, 2)$, si ottiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\mathrm{e}^{xy-2x} - 1 - xy + 2x}{x^2 + (y-2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{1 + xy - 2x + \frac{1}{2}(xy-2x)^2 - 1 - xy + 2x}{x^2 + (y-2)^2}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{1}{2}\frac{x^2(y-2)^2}{x^2 + (y-2)^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{\rho^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{\rho^2} = 0\,,$$

dove l'ultimo limite è indipendente da θ.

Esercizio 2

L'equazione differenziale associata al problema di Cauchy proposto è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che ha come unico integrale singolare la funzione $y(x) \equiv 0$. Pertanto, se $\lambda = 0$, essa è l'unica soluzione del problema di Cauchy. Se $\lambda \neq 0$, separando le variabili, si ottiene invece:

$$-\frac{1}{5y^5(x)} = \int y^{-6}\, dy\Big|_{y=y(x)} = \int \arctan x\, dx = x \arctan x - \log\sqrt{1+x^2} + C\,,$$

dove il secondo integrale è stato calcolato mediante integrazione per parti. Imponendo la condizione iniziale (e ricordando che ora $\lambda \neq 0$) ricaviamo $-1/\lambda^5 = -1/5y^5(0) = C$ e quindi la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \frac{\lambda}{\left[5\lambda^5 \log\sqrt{1+x^2} - 5\lambda^5 x \arctan x + 5\right]^{1/5}}$$

Notiamo che per $\lambda = 0$ riotteniamo la soluzione $y(x) \equiv 0$.

Esercizio 3

Poiché f è continua nell'intervallo $[1, +\infty)$, per stabilire se essa è impropriamente integrabile nell'intervallo proposto, è sufficiente controllarne solo il comportamento asintotico all'infinito. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = x^{-3/2}$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = 1/\sqrt{x}$, si ottiene che, per $x \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{\sin^\alpha(x^{-3/2})}{(\mathrm{e}^{1/\sqrt{x}} - 1)^2 - \frac{1}{x}} \sim \frac{x^{-3\alpha/2}}{(1 + 1/\sqrt{x} + 1/2x - 1)^2 - \frac{1}{x}} \sim \frac{x^{-3\alpha/2}}{x^{-3/2}} = \frac{1}{x^{3\alpha/2 - 3/2}}\,.$$

Pertanto si ottiene che l'integrale proposto converge se e solo se $\frac{3}{2}(\alpha - 1) > 1$, ovvero per $\alpha > 5/3$.

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1 + x)$ e quello al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = x^{1/2}$, si ottiene

$$f(x) \sim x - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 1 + 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} = -\frac{11}{24}x^2\,.$$

Pertanto, l'ordine di infinitesimo di f, per $x \to 0^+$, è pari a 2.

Esercizio 5

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi, per ogni $\alpha > 0$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sqrt[4]{1+t}$, con $t = \sin^2(1/n)$, per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/n$, e, infine, per la funzione $t \mapsto \log(1 + t)$, con $t = 1/n^\alpha$, si ottiene:

$$a_n := \frac{\sqrt[4]{1 + \sin^2\frac{1}{n}} - 1}{\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)} \sim \frac{\frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^\alpha}} \sim \frac{1}{4}\frac{1}{n^2}\, n^\alpha = \frac{1}{4n^{2-\alpha}}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, la serie proposta converge se e solo se $2 - \alpha > 1$, ovvero per $\alpha < 1$.

Esercizio 6

Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, possiamo fare lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine in un intorno dell'origine e scrivere

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)t^2 + o(t^2) = t^2 + o(t^2)\,.$$

Ponendo ora $t = 1/(x+1)$, dallo sviluppo precedente si ricava

$$(*) \qquad f\left(\frac{1}{x+1}\right) \sim \frac{1}{(x+1)^2} \sim \frac{1}{x^2} \qquad \text{per } x \to +\infty\,.$$

Pertanto, poiché la funzione $x \mapsto f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ è positiva su tutto $\mathbb{R}$, continua in tutti gli intervalli della forma $[1, M]$, $M > 1$, e vale la condizione $(*)$, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio proposto converge.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = xy + 2y$, e passando poi in coordinate polari centrate nel punto $(-2, 0)$, si ottiene:

$$\lim_{(x,y)\to(-2,0)} \frac{\log(1+xy+2y) - xy - 2y}{(x+2)^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(-2,0)} \frac{xy+2y-\frac{1}{2}(xy+2y)^2 - xy - 2y}{(x+2)^2+y^2} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(-2,0)} \frac{1}{2}\frac{y^2(x+2)^2}{(x+2)^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^2} = 0\,,$$

dove l'ultimo limite è indipendente da θ.

Esercizio 2
L'equazione differenziale associata al problema di Cauchy proposto è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che ha come unico integrale singolare la funzione $y(x) \equiv 0$. Pertanto, se $\lambda = 0$, essa è l'unica soluzione del problema di Cauchy. Se $\lambda \neq 0$, separando le variabili, si ottiene invece:

$$-\frac{1}{3y^3(x)} = \int y^{-4}\; dy\Big|_{y=y(x)} = \int \log(1+x)\; dx = (1+x)\log(1+x) - x + C\,,$$

dove il secondo integrale è stato calcolato mediante integrazione per parti. Imponendo la condizione iniziale (e ricordando che ora $\lambda \neq 0$) ricaviamo $-1/\lambda^3 = -1/3y^3(0) = C$ e quindi la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \frac{\lambda}{[3\lambda^3 x - 3\lambda^3(1+x)\log(1+x) + 3]^{1/3}}$$

Notiamo che per $\lambda = 0$ riotteniamo la soluzione $y(x) \equiv 0$.

Esercizio 3
Poiché f è continua nell'intervallo $(0, 1]$, per stabilire se essa è impropriamente integrabile nell'intervallo proposto, è sufficiente controllarne solo il comportamento asintotico nell'origine. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = x^{1/2}$, e quello al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = x^{1/3}$, si ottiene che, per $x \to 0^+$,

$$f(x) = \frac{(1-\cos\sqrt[3]{x})^2 - \frac{1}{4}x^{4/3}}{\log^\alpha(1+\sqrt{x})} \sim \frac{(1-1+\frac{x^{2/3}}{2} - \frac{x^{4/3}}{4!})^2 - \frac{x^{4/3}}{4}}{x^{\alpha/2}} \sim -\frac{x^2/4!}{x^{\alpha/2}} = -\frac{1}{24\,x^{\alpha/2-2}}\,.$$

Pertanto si ottiene che l'integrale proposto converge se e solo se $\alpha/2 - 2 < 1$, ovvero per $\alpha < 6$.

Esercizio 4
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per le funzioni $t \mapsto \sin t$ e $t \mapsto e^t$, con $t = x^{1/2}$, si ottiene

$$f(x) \sim \sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{3!} - 1 - \sqrt{x} - \frac{x}{2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + 1 + \frac{x}{2} = -\frac{x^{3/2}}{3}\,.$$

Pertanto, l'ordine di infinitesimo di f, per $x \to 0^+$, è pari a $3/2$.

Esercizio 5
Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi, per ogni $\alpha > 0$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sqrt[5]{1+t}$, con $t = \log^2(1+1/n^2)$, per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 1/n^2$, e, infine, per la funzione $t \mapsto e^t$, con $t = 1/n$, si ottiene:

$$a_n := \frac{\left(e^{1/n} - 1\right)^\alpha}{\sqrt[5]{1+\log^2(1+1/n^2)} - 1} \sim \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{5}\log^2(1+1/n^2)} \sim 5\frac{1}{n^\alpha}\,n^4 = \frac{5}{n^{\alpha-4}}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, la serie proposta converge se e solo se $\alpha - 4 > 1$, ovvero per $\alpha > 5$.

Esercizio 6

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, possiamo fare lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine in un intorno dell'origine e scrivere

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + o(t) = 2t + o(t)\,.$$

Ponendo ora $t = 1/(1+x^2)$, dallo sviluppo precedente si ricava

$$(*) \qquad f\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \sim \frac{2}{1+x^2} \sim \frac{2}{x^2} \qquad \text{per } x \to +\infty\,.$$

Pertanto, poiché la funzione $x \mapsto f\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ è positiva su tutto $\mathbb{R}$, continua in tutti gli intervalli della forma $[1, M]$, $M > 1$, e vale la condizione $(*)$, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio proposto converge.