SOLUZIONI COMPITO del 10/09/2009
ANALISI 1 - INFORMATICA 12 CFU + AUTOMATICA 5+5 CFU
ANLISI 1 (I MODULO) - INFORMATICA + AUTOMATICA 5 CFU

TEMA A

Esercizio 1
L'equazione proposta ha come soluzioni l'unione delle soluzioni delle due equazioni $z^2 + 2z - 8 = 0$ e $z^3 + 1 = 0$. La prima si risolve utilizzando la consueta formula risolutiva delle equazioni di secondo grado e fornisce $z_1 = -4$ e $z_2 = 2$. La seconda si riconduce al calcolo delle 3 radici cubiche di -1:

$$z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{i\pi}} = \{\mathrm{e}^{i\pi/3},\ \mathrm{e}^{i\pi},\ \mathrm{e}^{5i\pi/3}\}\,.$$

Esercizio 2
Per $\alpha = 0$ il limite proposto si riscrive come

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \sin 1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \sin 1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x \sin 1 = +\infty\,.$$

Per $\alpha > 0$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/x^\alpha$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\,\frac{1}{x^\alpha}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ 1 & \text{se } \alpha = 1, \\ 0 & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 3
Calcolando la derivata prima di f si ottiene $f'(x) = 9x^3 - 18x^2 + 9x = 9x(x^2 - 2x + 1)$. Studiando il segno e gli zeri di tale derivata, ricaviamo che essa si annulla per $x = 0$ e $x = 1$, è positiva per $x > 0$ (dove f è crescente) ed è negativa per $x < 0$ (dove f è decrescente); quindi $x = 0$ è punto di minimo assoluto. Calcolando la derivata seconda di f si ottiene $f''(x) = 27x^2 - 36x + 9$. Studiando il segno e gli zeri di tale derivata, ricaviamo che essa si annulla per $x = 1/3$ e $x = 1$, che sono punti di flesso, è positiva per $x < 1/3$ e $x > 1$ (dove f è convessa) ed è negativa per $1/3 < x < 1$ (dove f è concava).

Domanda 1
Poiché f' è continua e cambia segno agli estremi, per il Teorema degli zeri deve avere almeno uno zero, cioè esiste $x_0 \in (-3, 5)$ tale che $f'(x_0) = 0$, e quindi tale punto è un punto stazionario per f.

Esercizio 4
Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene che l'insieme E si riscrive nella forma $\tilde{E} = \{(\rho, \theta) : 1 \le \rho \le 2,\ \pi/2 \le \theta \le \pi\}$ e

$$\iint_E \frac{3x \log(x^2+y^2)}{y(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{E}} \frac{3\rho\cos\theta \log \rho^2}{\rho(\sin\theta)\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = 3\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta\right)\left(\int_1^2 \frac{\log\rho^2}{\rho}\,d\rho\right)$$
$$= 3\left(\log(\sin\theta)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}\right)\left(2\int_1^2 \frac{\log\rho}{\rho}\,d\rho\right) = 3\log\sqrt{2}\left(2\,\frac{\log^2\rho}{2}\Big|_1^2\right) = 3\log\sqrt{2}\log^2 2\,.$$

Esercizio 5
Il campo di esistenza della funzione proposta è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} 1 - (x^2+y^2) > 0\,; \\ y - x^2 \ge 0\,; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 < 1\,; \\ y \ge x^2\,. \end{cases}$$

Quindi D è costituito dalla porzione di piano che sta sopra alla parabola $y = x^2$ e dentro al cerchio di centro l'origine e raggio 1. Il bordo della parabola è incluso (salvo i punti d'intersezione con la circonferenza), mentre il bordo del cerchio è escluso.

Esercizio 6

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2$. Quindi, la soluzione generale della corrispondente equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$. Dal metodo di sovrapposizione e da quello di somiglianza, si ottiene che una soluzione particolare è del tipo $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{x}$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa, si ricava $A = 1$ e $B = -1/3$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione proposta è dato da $y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x}$.

Domanda 2

Dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ricava subito che $F(x) = \arctan[f'(x)] - \arctan[f'(1)]$. Poiché per ipotesi $f'(x) > 0$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ed $f'(1) = 0$, e poiché $\arctan 0 = 0$ e la funzione $x \mapsto \arctan x$ ha il segno del proprio argomento, si ottiene facilmente che $F(x) = \arctan[f'(x)] \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

TEMA B

Esercizio 1

L'equazione proposta ha come soluzioni l'unione delle soluzioni delle due equazioni $z^2+z-2=0$ e $z(z^2+1)=0$. La prima si risolve utilizzando la consueta formula risolutiva delle equazioni di secondo grado e fornisce $z_1=-2$ e $z_2=1$. La seconda ha una soluzione $z_3=0$ e poi si riconduce al calcolo delle 2 radici quadrate di -1:

$$z=\sqrt{-1}=\sqrt{e^{i\pi}}=\{e^{i\pi/2},\ e^{3i\pi/2}\}\,.$$

Esercizio 2

Utilizziamo lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t\mapsto\log(1+t)$, con $t=1/x$. Per $\alpha=0$ il limite proposto si riscrive come

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(\frac{1}{x}\right)}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2}=+\infty\,.$$

Per $\alpha>0$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-3}}=\begin{cases}+\infty & \text{se } 0<\alpha<3,\\ 1 & \text{se } \alpha=3,\\ 0 & \text{se } \alpha>3.\end{cases}$$

Esercizio 3

Calcolando la derivata prima di f si ottiene $f'(x)=-x^3-2x^2-x=-x(x^2+2x+1)$. Studiando il segno e gli zeri di tale derivata, ricaviamo che essa si annulla per $x=0$ e $x=-1$, è positiva per $x<0$ (dove f è crescente) ed è negativa per $x>0$ (dove f è decrescente); quindi $x=0$ è punto di massimo assoluto. Calcolando la derivata seconda di f si ottiene $f''(x)=-3x^2-4x-1$. Studiando il segno e gli zeri di tale derivata, ricaviamo che essa si annulla per $x=-1$ e $x=-1/3$, che sono punti di flesso, è negativa per $x<-1$ e $x>-1/3$ (dove f è concava) ed è positiva per $-1<x<-1/3$ (dove f è convessa).

Domanda 1

Poiché f'' è continua e cambia segno agli estremi, per il Teorema degli zeri deve avere almeno uno zero, cioè esiste $x_0\in(-3,5)$ tale che $f''(x_0)=0$. Inoltre, poichè f'' è strettamente crescente, tale zero è <u>unico</u> ed f'' è negativa prima di x_0 e positiva dopo; pertanto tale punto è un punto di flesso per f.

Esercizio 4

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene che l'insieme E si riscrive nella forma $\tilde{E}=\{(\rho,\theta):1\le\rho\le3,\ 0\le\theta\le\pi/4\}$ e

$$\begin{aligned}\iint_E\frac{4y\log(x^2+y^2)}{x(x^2+y^2)}\,dx\,dy&=\iint_{\tilde{E}}\frac{4\rho\sin\theta\log\rho^2}{\rho(\cos\theta)\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta=4\left(\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta\right)\left(\int_1^3\frac{\log\rho^2}{\rho}\,d\rho\right)\\&=4\left(-\log(\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4}\right)\left(2\int_1^3\frac{\log\rho}{\rho}\,d\rho\right)=4\log\sqrt{2}\left(2\,\frac{\log^2\rho}{2}\Big|_1^3\right)=4\log\sqrt{2}\log^2 3\,.\end{aligned}$$

Esercizio 5

Il campo di esistenza della funzione proposta è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases}x^2+y^2-1>0\,;\\ -y-x^2\ge0\,;\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad\begin{cases}x^2+y^2>1\,;\\ y\le -x^2\,.\end{cases}$$

Quindi D è costituito dalla porzione di piano che sta sotto alla parabola $y=-x^2$ e fuori al cerchio di centro l'origine e raggio 1. Il bordo della parabola è incluso (salvo i punti d'intersezione con la circonferenza), mentre il bordo del cerchio è escluso.

Esercizio 6
L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 9 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 3$. Quindi, la soluzione generale della corrispondente equazione omogenea è $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-3x}$. Dal metodo di sovrapposizione e da quello di somiglianza, si ottiene che una soluzione particolare è del tipo $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-3x} + B\mathrm{e}^{x}$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa, si ricava $A = -1$ e $B = 1/8$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione proposta è dato da $y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} - x\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{x}$.

Domanda 2
Dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ricava subito che $F(x) = \log[f'(x)] - \log[f'(0)]$. Poiché per ipotesi $f'(x) > 1$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed $f'(0) = 1$, e poiché $\log 1 = 0$ e la funzione $x \mapsto \log x$ è positiva quando il suo argomento è più grande di 1, si ottiene facilmente che $F(x) = \log[f'(x)] \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.