SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

$f(t) = -\mathrm{e}^{t^2}(1-\sin^2 t) \le 0 \quad \forall t \in [-\pi/2, \pi/2];$

$F(x) > 0 \quad -\pi/2 \le x < 0; \quad F(x) < 0 \quad 0 < x \le \pi/2; \quad F(x) = 0 \quad x = 0;$

$F(\pm\pi/2) = \displaystyle\int_0^{\pm\pi/2} f(t)\, dt = \mp\alpha, \quad \text{con } \alpha > 0;$

$F'(x) = f(x) = -\mathrm{e}^{x^2}(1-\sin^2 x) < 0 \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2); \quad F'(\pm\pi/2) = f(\pm\pi/2) = 0;$

$F''(x) = f'(x) = 2\mathrm{e}^{x^2}\cos x[\sin x - x\cos x]$

$F''(x) < 0 \quad -\pi/2 < x < 0, \quad F''(x) > 0 \quad 0 < x < \pi/2, \quad F''(x) = 0 \quad x = 0, \pm\pi/2.$

Esercizio 2

Osservando che una parametrizzazione canonica della curva polare γ è fornita da

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = (\mathrm{e}^\theta + 1)\cos^2\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = (\mathrm{e}^\theta + 1)\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

e che $P_0 = \Phi(0)$, si ricava subito che $\Phi'(0) = (1, 2)$ e quindi la retta tangente alla curva γ in P_0 ha equazioni parametriche date da

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = 2t \end{cases} .$$

Esercizio 3

Osservando che

$$0 < \sin^4 n < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < \sin(\sin^4 n) < \sin(1)$$

e che, posto $q := \sqrt[4]{\sin(1)}$, si ha $0 < q < 1$, dal "*teorema dei carabinieri*" si ottiene che il limite proposto è nullo, in quanto

$$0 < [\sin(\sin^4 n)]^{n/4} < q^n \to 0 \qquad \text{per} \quad n \to +\infty .$$

Esercizio 4

Riscrivendo

$$\log(x-1)^2 = 2\log(x-1) = 2\log(1 + x - 2)$$

ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+t)$ con $t = x - 2$, si ottiene

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{(\sqrt{x-2})^3 \log[(x-1)^2]}{(x^2-4)^{5/2}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2(x-2)^{3/2}(x-2)}{(x+2)^{5/2}(x-2)^{5/2}} = \frac{1}{16} .$$

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

$f(t) = e^{t^2}(1-\sin^2 t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,\pi];$

$F(x) < 0 \quad 0 \leq x < \pi/2; \quad F(x) > 0 \quad \pi/2 < x \leq \pi; \quad F(x) = 0 \quad x = \pi/2;$

$F(0) = \int_{\pi/2}^{0} f(t)\,dt = \alpha, \quad \text{con } \alpha < 0; \quad F(\pi) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\,dt = \beta, \quad \text{con } \beta > 0;$

$F'(x) = f(x) = e^{x^2}(1-\sin^2 x) > 0 \quad \forall x \in [0,\pi] \setminus \{\pi/2\}; \quad F'(0) = f(0) = 1;$

$F'(\pi) = f(\pi) = e^{\pi^2}; \quad F'(\pi/2) = 0$ flesso a tangente orizzontale;

$F''(x) = f'(x) = -2e^{x^2}\cos x[\sin x - x\cos x]$

$F''(x) < 0 \;\; 0 < x < \pi/2, \quad F''(x) > 0 \;\; \pi/2 < x \leq \pi, \quad F''(x) = 0 \;\; x = 0, \pi/2.$

Esercizio 2

Osservando che una parametrizzazione canonica della curva polare γ è fornita da

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = (e^{2\theta}+3)\sin\theta\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = (e^{2\theta}+3)\sin^2\theta \end{cases}$$

e che $P_0 = \Phi(\pi/2)$, si ricava subito che $\Phi'(\pi/2) = (-e^{\pi} - 3, 2e^{\pi})$ e quindi la retta tangente alla curva γ in P_0 ha equazioni parametriche date da

$$\begin{cases} x(t) = -(e^{\pi}+3)t \\ y(t) = (e^{\pi}+3) + 2e^{\pi}t \end{cases} .$$

Esercizio 3

Osservando che

$$0 < \sin^2 n < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < \sin(\sin^2 n) < \sin(1)$$

e che, posto $q := \sqrt{\sin(1)}$, si ha $0 < q < 1$, dal "*teorema dei carabinieri*" si ottiene che il limite proposto è nullo, in quanto

$$0 < [\sin(\sin^2 n)]^{n/2} < q^n \to 0 \qquad \text{per} \;\; n \to +\infty .$$

Esercizio 4

Riscrivendo

$$\log(x-1)^4 = 4\log(x-1) = 4\log(1+x-2)$$

ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+t)$ con $t = x-2$, si ottiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[3]{x-2})^4}{(x^2-4)^{1/3}\log[(x-1)^4]} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{4/3}}{4(x+2)^{1/3}(x-2)^{1/3}(x-2)} = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} .$$

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

$f(t) = \mathrm{e}^{t^2}(1-\cos^2 t) \geq 0 \quad \forall t \in [-\pi/2, \pi/2];$

$F(x) < 0 \quad -\pi/2 \leq x < 0; \quad F(x) > 0 \quad 0 < x \leq \pi/2; \quad F(x) = 0 \quad x = 0;$

$F(\pm\pi/2) = \displaystyle\int_0^{\pm\pi/2} f(t)\, dt = \pm\alpha, \quad \text{con } \alpha > 0;$

$F'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{x^2}(1-\cos^2 x) > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}; \quad F'(\pm\pi/2) = f(\pm\pi/2) = \mathrm{e}^{(\pi/2)^2};$

$F'(0) = 0$ flesso a tangente orizzontale ; $\quad F''(x) = f'(x) = 2\mathrm{e}^{x^2}\sin x[\cos x + x\sin x]$

$F''(x) < 0 \quad -\pi/2 \leq x < 0, \quad F''(x) > 0 \quad 0 < x \leq \pi/2, \quad F''(x) = 0 \quad x = 0.$

Esercizio 2

Osservando che una parametrizzazione canonica della curva polare γ è fornita da

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = \mathrm{e}^\theta \sin\theta\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = \mathrm{e}^\theta \sin^2\theta \end{cases}$$

e che $P_0 = \Phi(\pi/2)$, si ricava subito che $\Phi'(\pi/2) = (-\mathrm{e}^{\pi/2}, \mathrm{e}^{\pi/2})$ e quindi la retta tangente alla curva γ in P_0 ha equazioni parametriche date da

$$\begin{cases} x(t) = -\mathrm{e}^{\pi/2}t \\ y(t) = \mathrm{e}^{\pi/2} + \mathrm{e}^{\pi/2}t \end{cases} .$$

Esercizio 3

Osservando che

$$0 < |\sin n|^{1/2} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < \sin(|\sin n|^{1/2}) < \sin(1)$$

e che, posto $q := \sin^2(1)$, si ha $0 < q < 1$, dal "*teorema dei carabinieri*" si ottiene che il limite proposto è nullo, in quanto

$$0 < [\sin(|\sin n|^{1/2})]^{2n} < q^n \to 0 \qquad \text{per} \quad n \to +\infty .$$

Esercizio 4

Riscrivendo

$$\log(x-2)^2 = 2\log(x-2) = 2\log(1+x-3)$$

ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+t)$ con $t = x-3$, si ottiene

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x^2-9)^{2/3}\log[(x-2)^2]}{(\sqrt[3]{x-3})^5} = \lim_{x\to 3} \frac{2(x+3)^{2/3}(x-3)^{2/3}(x-3)}{(x-3)^{5/3}} = 2 \cdot 6^{2/3} .$$

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

$f(t) = -e^{t^2}(1-\cos^2 t) \leq 0 \quad \forall t \in [0,\pi];$

$F(x) > 0 \quad 0 \leq x < \pi/2; \quad F(x) < 0 \quad \pi/2 < x \leq \pi; \quad F(x) = 0 \quad x = \pi/2;$

$F(0) = \int_{\pi/2}^{0} f(t)\, dt = \alpha, \quad \text{con } \alpha > 0; \quad F(\pi) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\, dt = \beta, \quad \text{con } \beta < 0;$

$F'(x) = f(x) = -e^{x^2}(1-\cos^2 x) < 0 \quad \forall x \in (0,\pi); \quad F'(0) = f(0) = F'(\pi) = f(\pi) = 0;$

$F''(x) = f'(x) = -2e^{x^2}\sin x[\cos x + x\sin x]$

$F''(x) < 0 \;\; 0 \leq x < \gamma, \quad F''(x) > 0 \;\; \gamma < x \leq \pi, \quad F''(x) = 0 \;\; x = \gamma, \quad \text{con } \gamma > \pi/2.$

Esercizio 2

Osservando che una parametrizzazione canonica della curva polare γ è fornita da

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = e^{2\theta}\cos^2\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = e^{2\theta}\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

e che $P_0 = \Phi(0)$, si ricava subito che $\Phi'(0) = (2,1)$ e quindi la retta tangente alla curva γ in P_0 ha equazioni parametriche date da

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = t \end{cases} .$$

Esercizio 3

Osservando che

$$0 < |\sin n|^{1/4} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < \sin(|\sin n|^{1/4}) < \sin(1)$$

e che, posto $q := \sin^4(1)$, si ha $0 < q < 1$, dal "*teorema dei carabinieri*" si ottiene che il limite proposto è nullo, in quanto

$$0 < [\sin(|\sin n|^{1/4})]^{4n} < q^n \to 0 \qquad \text{per} \quad n \to +\infty .$$

Esercizio 4

Riscrivendo

$$\log(x-2)^3 = 3\log(x-2) = 3\log(1+x-3)$$

ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+t)$ con $t = x-3$, si ottiene

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2-9)^{3/2}}{(\sqrt{x-3})\log[(x-2)^3]} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+3)^{3/2}(x-3)^{3/2}}{3(x-3)^{1/2}(x-3)} = \frac{6^{3/2}}{3} .$$