SOLUZIONI COMPITO 11.01.06

Esercizio 1

a) Utilizzando il criterio di Hadamard, si ottiene

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1/n^2+n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{1+n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad R = 1\,;$$

pertanto la serie converge assolutamente nell'intervallo determinato dalla condizione $|x-2| < 1$, ovvero per $x \in (1,3)$ e non converge in $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.

b) Studiando il comportamento della serie sul bordo dell'intervallo di convergenza, cioè per $x = 1$ e $x = 3$, si ottengono, rispettivamente, le due serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1/n^2+n^2}(-1)^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1/n^2+n^2}$$

che convergono entrambe assolutamente, in quanto il modulo del termine generale è asintotico a $1/n^2$, che è il termine generale di una serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1 e pertanto convergente. Quindi l'insieme massimale di convergenza assoluta è l'intervallo chiuso $[1,3]$.

Esercizio 2

L'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine di Eulero, che si può quindi riscrivere nella forma

$$z''(t) + 4z(t) = 5\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{dove} \qquad t = \log x\,.$$

L'equazione caratteristica ad essa associata è data da $\lambda^2 + 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2i$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da $z_o(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$. A sua volta, la soluzione particolare sarà della forma $z_p(t) = A\mathrm{e}^{-t}$. Sostituendo nell'equazione differenziale, si perviene alle equazioni

$$A\mathrm{e}^{-t} + 4A\mathrm{e}^{-t} = 5\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{da cui} \qquad A = 1$$

ovvero $z_p(t) = \mathrm{e}^{-t}$ e quindi $z(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + \mathrm{e}^{-t}$. Risostituendo $t = \log x$, si ottiene $y(x) = C_1\cos(2\log x) + C_2\sin(2\log x) + 1/x$. Imponendo infine le condizioni richieste, si ricava

$$\begin{cases} 1 = y(1) = C_1 + 1 & \Longleftrightarrow \qquad C_1 = 0 \\ 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} C_2\sin(\log x) & \Longleftrightarrow \qquad C_2 = 0. \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione richiesta sarà $y(x) = \frac{1}{x}$, che risulta essere definita per $x \in (0,+\infty)$.

Esercizio 3

Osserviamo innanzitutto che l'insieme T non è altro che la porzione della corona circolare compresa tra il cerchio di centro l'origine e raggio 1 ed il cerchio di centro l'origine e raggio 2, posta nel primo e quarto quadrante. Effettuando un cambiamento in coordinate polari, si ottiene

$$\iint_T \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \frac{r^2}{1+r^2}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\right)dr$$
$$= \left(\int_1^2\left(1-\frac{1}{1+r^2}\right)dr\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\right) = \left(r - \arctan r\Big|_1^2\right)\left(\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)$$
$$= 2[1 - \arctan 2 + \arctan 1]\,.$$

Esercizio 4

a) La funzione proposta è definita nell'insieme $I_{def} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z \neq i, \ z \neq -i\}$. Poiché essa è ottenuta mediante composizione di funzioni olomorfe nel proprio insieme di definizione, è essa stessa una funzione olomorfa in I_{def}.

b) Ricordiamo che

$$\mathrm{Res}(f, z_0 = \pm i) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to \pm i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z \mp i)^n f(z) \right] ,$$

dove n è l'ordine del polo di f. Poiché $z = \pm i$ sono poli del primo ordine, si ricava subito

$$\mathrm{Res}(f, z_0 = \pm i) = \lim_{z \to \pm i} \left[(z \mp i) f(z) \right] = \lim_{z \to \pm i} \frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z \pm i} = \pm \frac{1/\mathrm{e}}{2i} = \mp \frac{i}{2\mathrm{e}} .$$