SOLUZIONI COMPITO dell'11/01/2012
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1

Ponendo $w = 3z + 1$ l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $w^3 = -8$, da cui si ricava

$$w = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8e^{i\pi}} = 2e^{i(\pi+2k\pi)/3} = \begin{cases} 2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}i, \\ 2e^{i\pi} = -2, \\ 2e^{i5\pi/3} = 1 - \sqrt{3}i. \end{cases}$$

Pertanto, avremo $z = (w-1)/3$, ovvero

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}i\,, \qquad z_2 = -\frac{3}{3} = -1\,, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}i\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini non negativi. Tenendo conto che, per $\varepsilon_n \to 0$, si ha

$$\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n\,, \qquad \sin\varepsilon_n \sim \varepsilon_n\,, \qquad (1+\varepsilon_n)^\gamma - 1 \sim \gamma\varepsilon_n\,,$$

otteniamo

$$a_n := \frac{\left[\log\left(\sin\frac{1}{n}+1\right)\right]^{3\alpha^2-1}}{\sin\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}-1\right]} \sim \frac{\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{3\alpha^2-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}-1} \sim \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{3\alpha^2-1}}{\frac{1}{3n}} = 3\frac{1}{n^{3\alpha^2-2}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, avremo che la serie proposta converge per $3\alpha^2 - 2 > 1$, ovvero $3\alpha^2 > 3$, che fornisce $\alpha^2 > 1$, cioè $\alpha < -1$ e $\alpha > 1$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili che ha come unica soluzione singolare la funzione costante $y(x) \equiv 0$, che però non soddisfa la condizione iniziale. Poiché il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione per $x \in (0,+\infty)$ e $y \in \mathbb{R}$, avremo che la soluzione del problema proposto si ottiene per separazione di variabili. Ponendo $y \neq 0$, otteniamo

$$-\frac{1}{2y^2} = \int \frac{1}{y^3}\,dy = -\int \log x\,dx = -x\log x + x + \widetilde{C} \qquad \Longrightarrow \qquad y^2(x) = \frac{1}{2x\log x - 2x + C}$$

$$\text{ovvero, tenendo conto della condizione iniziale } y(1) = 1 > 0\,, \qquad y(x) = \frac{1}{\sqrt{2x\log x - 2x + C}}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, ricaviamo $1 = y(1) = \frac{1}{\sqrt{-2+C}}$, che fornisce $C = 3$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2x\log x - 2x + 3}}\,.$$

Esercizio 4
Osserviamo che
$$\lim_{x\to 0} |x|^{x^2} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x^2 \log|x|} = \mathrm{e}^0 = 1\,,$$
dove abbiamo usato il limite notevole $|x|^\alpha \log|x| \to 0$, per $x \to 0$ e $\alpha > 0$. Quindi la funzione proposta è estendibile con continuità in $x = 0$. Consideriamo, pertanto, la funzione prolungata $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} |x|^{x^2} & \text{se } x \neq 0; \\ 1 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$
e studiamo la derivabilità di tale funzione nell'origine. Considerando il rapporto incrementale, otteniamo
$$\lim_{h\to 0} \frac{\widetilde{f}(0+h) - \widetilde{f}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{h^2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{h^2 \log|h|} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \log|h|}{h} = \lim_{h\to 0} h \log|h| = 0\,,$$
dove, nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato il limite notevole $\mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, per $\varepsilon_n \to 0$. Pertanto, la funzione proposta risulta anche derivabile in $x = 0$.

Esercizio 5

a) La serie proposta converge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^6}$ e $g\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^3}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^3}$.

b) La serie proposta diverge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^{9/2}}$ e $g\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^4}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^{1/2}}$.

c) La serie proposta diverge poiché il termine generale non è infinitesimo. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \log^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^6}$ e $g\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \sin^2\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim n^4$.

d) La serie proposta converge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \sin^3\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^3}$ e $g\left(\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right) \sim \log^2\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^6}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^3}$.

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $w = 4z - 1$ l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $w^4 = 16$, da cui si ricava

$$w = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16\mathrm{e}^{i0}} = 2\mathrm{e}^{i(0+2k\pi)/4} = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{i0} = 2, \\ 2\mathrm{e}^{i\pi/2} = 2i, \\ 2\mathrm{e}^{i\pi} = -2, \\ 2\mathrm{e}^{i3\pi/2} = -2i. \end{cases}$$

Pertanto, avremo $z = (w+1)/4$, ovvero

$$z_1 = \frac{3}{4}\,, \qquad z_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i\,, \quad z_3 = -\frac{1}{4}\,, \quad z_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini non negativi. Tenendo conto che, per $\varepsilon_n \to 0$, si ha

$$\sinh \varepsilon_n \sim \varepsilon_n\,, \qquad (1+\varepsilon_n)^\gamma - 1 \sim \gamma\varepsilon_n\,, \qquad \log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n\,,$$

otteniamo

$$a_n := \frac{\sinh\left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^3 - 1\right]}{\left[\sinh\left(\log\left(1+\frac{5}{n}\right)\right)\right]^{\alpha^2-4}} \sim \frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^3 - 1}{\left[\log\left(1+\frac{5}{n}\right)\right]^{\alpha^2-4}} \sim \frac{\frac{15}{n}}{\left(\frac{5}{n}\right)^{\alpha^2-4}} = \frac{15}{5^{\alpha^2-4}}\frac{1}{n^{5-\alpha^2}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, avremo che la serie proposta converge per $5 - \alpha^2 > 1$, ovvero $\alpha^2 < 4$, che fornisce $-2 < \alpha < 2$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili che ha come unica soluzione singolare la funzione costante $y(x) \equiv 0$, che però non soddisfa la condizione iniziale. Poiché il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, avremo che la soluzione del problema proposto si ottiene per separazione di variabili. Ponendo $y \neq 0$, otteniamo

$$-\frac{1}{3y^3} = \int \frac{1}{y^4}\,dy = -\int \arctan x\,dx = -x\arctan x + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \widetilde{C} = -x\arctan x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \widetilde{C}$$

$$\Longrightarrow \qquad y^3(x) = \frac{1}{3x\arctan x - \frac{3}{2}\log(1+x^2) + C} \quad \text{ovvero} \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x\arctan x - \frac{3}{2}\log(1+x^2) + C}}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, ricaviamo $1 = y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{C}}$, che fornisce $C = 1$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x\arctan x - \frac{3}{2}\log(1+x^2) + 1}}\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|^x} = \lim_{x\to 0}|x|^{-x} = \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{-x\log|x|} = \mathrm{e}^0 = 1\,,$$

dove abbiamo usato il limite notevole $|x|^\alpha \log|x| \to 0$, per $x \to 0$ e $\alpha > 0$. Quindi la funzione proposta è estendibile con continuità in $x = 0$. Consideriamo, pertanto, la funzione prolungata $\widetilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} |x|^{-x} & \text{se } x \neq 0; \\ 1 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

e studiamo la derivabilità di tale funzione nell'origine. Considerando il rapporto incrementale, otteniamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{\widetilde{f}(0+h) - \widetilde{f}(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^{-h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-h\log|h|} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{h\log|h|}{h} = -\lim_{h\to 0}\log|h| = +\infty\,,$$

dove, nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato il limite notevole $\mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, per $\varepsilon_n \to 0$. Pertanto, la funzione proposta non è derivabile in $x = 0$, ma presenta un punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 5

a) La serie proposta converge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \sin^3\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^3}$ e $g\left(\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim \log^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^2}$.

b) La serie proposta diverge poiché il termine generale non è infinitesimo. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^{9/2}}$ e $g\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^4}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim n^{1/2}$.

c) La serie proposta converge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \log^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^6}$ e $g\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^3}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^3}$.

d) La serie proposta diverge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim \log^3\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ e $g\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \sin^2\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^{1/2}}$.

TEMA C

Esercizio 1

Ponendo $w = 3z - 1$ l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $w^4 = -16$, da cui si ricava

$$w = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16e^{i\pi}} = 2e^{i(\pi+2k\pi)/4} = \begin{cases} 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \\ 2e^{i3\pi/4} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \\ 2e^{i5\pi/4} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \\ 2e^{i7\pi/4} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i. \end{cases}$$

Pertanto, avremo $z = (w + 1)/3$, ovvero

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i\,, \qquad z_2 = \frac{-\sqrt{2}+1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i\,, \quad z_3 = \frac{-\sqrt{2}+1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i\,, \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}+1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini non negativi. Tenendo conto che, per $\varepsilon_n \to 0$, si ha

$$\sin\varepsilon_n \sim \varepsilon_n\,, \qquad \log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n\,, \qquad \sinh\varepsilon_n \sim \varepsilon_n\,, \qquad (1+\varepsilon_n)^\gamma - 1 \sim \gamma\varepsilon_n\,,$$

otteniamo

$$a_n := \frac{\sin\left[\log\left(1+\frac{7}{n}\right)\right]}{\left[\sinh\left(\left(1+\frac{7}{n}\right)^{1/2} - 1\right)\right]^{1-2\alpha^2}} \sim \frac{\log\left(1+\frac{7}{n}\right)}{\left[\left(1+\frac{7}{n}\right)^{1/2} - 1\right]^{1-2\alpha^2}} \sim \frac{\frac{7}{n}}{\left(\frac{7}{2n}\right)^{1-2\alpha^2}} = 7\left(\frac{2}{7}\right)^{1-2\alpha^2} \frac{1}{n^{2\alpha^2}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, avremo che la serie proposta converge per $2\alpha^2 > 1$, ovvero $\alpha^2 > 1/2$, che fornisce $\alpha < -1/\sqrt{2}$ e $\alpha > 1/\sqrt{2}$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili che ha come unica soluzione singolare la funzione costante $y(x) \equiv 0$, che però non soddisfa la condizione iniziale. Poiché il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, avremo che la soluzione del problema proposto si ottiene per separazione di variabili. Ponendo $y \neq 0$, otteniamo

$$-\frac{1}{2y^2} = \int \frac{1}{y^3}\,dy = 2\int \arctan x\,dx = 2x\arctan x - 2\int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \widetilde{C} = 2x\arctan x - \log(1+x^2) + \widetilde{C}$$

$$\Longrightarrow \qquad y^2(x) = \frac{1}{2\log(1+x^2) - 4x\arctan x + C}$$

ovvero, tenendo conto della condizione iniziale $y(0) = 2 > 0\,, \quad y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\log(1+x^2) - 4x\arctan x + C}}\,.$

Imponendo la condizione iniziale, ricaviamo $2 = y(0) = \frac{1}{\sqrt{C}}$, che fornisce $C = 1/4$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\log(1+x^2) - 4x\arctan x + 1/4}}\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{|x+1|^{(x+1)}} = \lim_{x\to -1} |x+1|^{-(x+1)} = \lim_{x\to -1} \mathrm{e}^{-(x+1)\log|x+1|} = \mathrm{e}^0 = 1\,,$$

dove abbiamo usato il limite notevole $|t|^\alpha \log|t| \to 0$, per $x \to 0$ e $\alpha > 0$, con $t = x+1 \to 0$, per $x \to -1$. Quindi la funzione proposta è estendibile con continuità in $x = -1$. Consideriamo, pertanto, la funzione prolungata $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} |x+1|^{-(x+1)} & \text{se } x \neq -1; \\ \\ 1 & \text{se } x = -1; \end{cases}$$

e studiamo la derivabilità di tale funzione in $x = -1$. Considerando il rapporto incrementale, otteniamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\widetilde{f}(-1+h) - \widetilde{f}(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{-h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-h\log|h|} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{h\log|h|}{h} = -\lim_{h\to 0} \log|h| = +\infty\,,$$

dove, nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato il limite notevole $\mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, per $\varepsilon_n \to 0$. Pertanto, la funzione proposta non è derivabile in $x = -1$, ma presenta un punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 5

a) La serie proposta diverge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim \log^3\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ e $g\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \sin^2\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^{1/2}}$.

b) La serie proposta converge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \log^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^6}$ e $g\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^3}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^3}$.

c) La serie proposta converge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \sin^3\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^3}$ e $g\left(\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim \log^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^2}$.

d) La serie proposta diverge poiché il termine generale non è infinitesimo. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^{9/2}}$ e $g\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^4}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim n^{1/2}$.

TEMA D

Esercizio 1

Ponendo $w = 4z + 1$ l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $w^3 = 8$, da cui si ricava

$$w = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8e^{i0}} = 2e^{i(0+2k\pi)/3} = \begin{cases} 2e^{i0} = 2, \\ 2e^{i2\pi/3} = -1 + \sqrt{3}i, \\ 2e^{i4\pi/3} = -1 - \sqrt{3}i. \end{cases}$$

Pertanto, avremo $z = (w - 1)/4$, ovvero

$$z_1 = 1/4\,, \qquad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\,, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini non negativi. Tenendo conto che, per $\varepsilon_n \to 0$, si ha

$$\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n\,, \qquad (1+\varepsilon_n)^\gamma - 1 \sim \gamma\varepsilon_n\,, \qquad \log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n\,, \qquad \sinh \varepsilon_n \sim \varepsilon_n\,,$$

otteniamo

$$a_n := \frac{\left[\sin\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{4/5} - 1\right)\right]^{4-\alpha^2}}{\log\left(\sinh\frac{2}{n} + 1\right)} \sim \frac{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{4/5} - 1\right)^{4-\alpha^2}}{\sinh\frac{2}{n}} \sim \frac{\left(\frac{8}{5n}\right)^{4-\alpha^2}}{\frac{2}{n}} = \left(\frac{8}{5}\right)^{4-\alpha^2} \frac{1}{2n^{3-\alpha^2}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, avremo che la serie proposta converge per $3 - \alpha^2 > 1$, ovvero $\alpha^2 < 2$, che fornisce $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili che ha come unica soluzione singolare la funzione costante $y(x) \equiv 0$, che però non soddisfa la condizione iniziale. Poiché il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione per $x \in (0, +\infty)$ e $y \in \mathbb{R}$, avremo che la soluzione del problema proposto si ottiene per separazione di variabili. Ponendo $y \neq 0$ e tenendo conto che $x > 0$, otteniamo

$$-\frac{1}{3y^3} = \int \frac{1}{y^4}\,dy = 2\int \log x\,dx = 2x\log x - 2x + \widetilde{C} \qquad \Longrightarrow \qquad y^3(x) = \frac{1}{6x - 6x\log x + C}$$

ovvero $\quad y(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{6x - 6x\log x + C}}\,.$

Imponendo la condizione iniziale, ricaviamo $\frac{1}{\sqrt[3]{6}} = y(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{6+C}}$, che fornisce $6 + C = 6$, ovvero $C = 0$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{6x - 6x\log x}}\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 1} |x-1|^{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} e^{(x-1)^2 \log|x-1|} = e^0 = 1\,,$$

dove abbiamo usato il limite notevole $|t|^\alpha \log|t| \to 0$, per $t \to 0$ e $\alpha > 0$, con $t = x-1 \to 0$, per $x \to 1$. Quindi la funzione proposta è estendibile con continuità in $x = 1$. Consideriamo, pertanto, la funzione prolungata $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} |x-1|^{(x-1)^2} & \text{se } x \neq 1; \\ 1 & \text{se } x = 1; \end{cases}$$

e studiamo la derivabilità di tale funzione in $x = 1$. Considerando il rapporto incrementale, otteniamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\widetilde{f}(1+h) - \widetilde{f}(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{h^2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2\log|h|} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\log|h|}{h} = \lim_{h\to 0} h\log|h| = 0\,,$$

dove, nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato il limite notevole $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, per $\varepsilon_n \to 0$. Pertanto, la funzione proposta risulta anche derivabile in $x = 1$.

Esercizio 5

a) La serie proposta diverge poiché il termine generale non è infinitesimo. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \log^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^6}$ e $g\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \sin^2\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim n^4$.

b) La serie proposta converge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^6}$ e $g\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^3}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^3}$.

c) La serie proposta converge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \sin^3\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^3}$ e $g\left(\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right) \sim \log^2\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^6}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^3}$.

d) La serie proposta diverge per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Infatti, poiché per ipotesi $f\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^{9/2}}$ e $g\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^4}$, detto a_n il termine generale della serie proposta, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^{1/2}}$.