CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 11 Febbraio 2011	**TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x^{2\alpha} e^{\alpha x}} \, dx,$$

converge.

---

2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = (1 - \cos x)^{\alpha} \log |x|$$

è prolungabile con continuità in $x = 0$. Studiare poi la derivabilità in $x = 0$ della funzione prolungata.

---

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{\sin x}{3 + \cos x} \, y(x) + 1 \, .$$

---

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{n \to +\infty} \left(3^n - n^{\sqrt{n}} \right); \qquad\qquad b) \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(\log n)^2}} - 1}{\sin^3 \left(\frac{1}{\log n} \right)} .$$

---

5. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali postivi. Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti implicazioni sono vere e fornire un controesempio per quelle false:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{1/n} \ \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{converge} \quad ,$$

$$\text{b)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{1/n} \ \text{converge} \, .$$

---

6. Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = xy + x^2 - x^2 y$.

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) $\square$ ANALISI I (h. 2.30) $\square$ Appello del 11 Febbraio 2011	**TEMA B** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Stabilire per quali valori del parametro reale α il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{3\alpha+2}e^{\alpha x}}{(e^x-1)^\alpha}\,dx,$$

converge.

---

2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\log|x|}{|\sin x|^\alpha}$$

è prolungabile con continuità in $x = 0$. Studiare poi la derivabilità in $x = 0$ della funzione prolungata.

---

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,y(x) + \sin x\,.$$

---

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$a)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(3^n - (\log n)^{\sqrt{n}}\right); \qquad b)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{\log n}\right)}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{(\log n)^3}}-1}.$$

---

5. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali postivi. Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti implicazioni sono vere e fornire un controesempio per quelle false:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\ \text{converge} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{+\infty}a_n\ \text{diverge}\quad,$$

$$\text{b)}\quad \sum_{n=1}^{+\infty}a_n\ \text{diverge} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\ \text{converge}\,.$$

---

6. Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x,y) = xy + x^2 - x^2y$.

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 11 Febbraio 2011	**TEMA C** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Stabilire per quali valori del parametro reale α il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{3\alpha+3} e^{\alpha x}}{(e^x - 1)^\alpha}\, dx,$$

converge.

---

2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{|\sin x|^{\alpha/2}}{\log |x|}$$

è prolungabile con continuità in $x = 0$. Studiare poi la derivabilità in $x = 0$ della funzione prolungata.

---

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{\sin 2x}{3 + \cos^2 x}\, y(x) + \sin x\,.$$

---

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{n\to+\infty} \left[(\sqrt{n})^{\log n} - 2^n \right]; \qquad b) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\log n}\right)^3}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\log n}} - 1\right)^2}.$$

---

5. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali postivi. Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti implicazioni sono vere e fornire un controesempio per quelle false:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{diverge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \ \text{converge},$$

$$\text{b)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \ \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{diverge} \quad .$$

---

6. Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = xy + x^2 - x^2 y$.

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 11 Febbraio 2011	**TEMA D** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I <u>NON</u> devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^{\alpha x} - 1)}{x^{3\alpha/2} e^{\alpha x}}\, dx,$$

converge.

---

2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(1 - \cos x)^{2\alpha} \log |x|}$$

è prolungabile con continuità in $x = 0$. Studiare poi la derivabilità in $x = 0$ della funzione prolungata.

---

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{\sin x}{3 + \cos x}\, y(x) + 9 - \cos^2 x\,.$$

---

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{n\to+\infty} \left[n^{\sqrt{\log n}} - 2^n \right]; \qquad\qquad b) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{(\log n)^3}} - 1}{\sin\left(\frac{1}{\log n}\right)^2}.$$

---

5. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali postivi. Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti implicazioni sono vere e fornire un controesempio per quelle false:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{1/n} \ \text{ converge}\,,$$

$$\text{b)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{1/n} \ \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ converge} \quad .$$

---

6. Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x,y) = xy + x^2 - x^2 y$.