SOLUZIONI COMPITO dell'11/02/2011
ANALISI 1 - MECCANICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che la funzione proposta è continua e positiva in tutto l'intervallo $(0,+\infty)$ pertanto, al fine di stabilire se l'integrale proposto converge, è sufficiente studiare il comportamento di f per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.

Per $x \to 0^+$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = \alpha x$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{\alpha x}{x^{2\alpha}} = \frac{\alpha}{x^{2\alpha-1}}\,,$$

che è impropriamente integrabile per $2\alpha - 1 < 1$, ovvero $\alpha < 1$.

Per $x \to +\infty$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^{2\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}} = \frac{1}{x^{2\alpha}}\,,$$

che è impropriamente integrabile per $2\alpha > 1$, ovvero $\alpha > 1/2$.

Pertanto, l'integrale proposto convergerà per $1/2 < \alpha < 1$.

Esercizio 2

Osserviamo che, per $x \to 0$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{|x|^{2\alpha}}{2^\alpha}\log|x|\,,$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \cos x$. Pertanto, la funzione proposta risulterà prolungabile con continuità in $x = 0$ solo per $\alpha > 0$ e, denotato con $\tilde{f}$ tale prolungamento, si avrà $\tilde{f}(0) = 0$. Studiando il rapporto incrementale di $\tilde{f}$ per tali valori di $\alpha > 0$, si ricava

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^\alpha \log|x| - 0}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{|x|^{2\alpha}}{2^\alpha}\log|x|}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\operatorname{sign}(x)\,\frac{|x|^{2\alpha-1}}{2^\alpha}\log|x| = \begin{cases}0 & \text{se } 2\alpha-1>0 \iff \alpha>1/2;\\ \pm\infty & \text{se } 2\alpha-1\le 0 \iff \alpha\le 1/2.\end{cases}\end{aligned}$$

In conclusione, la funzione prolungata sarà derivabile per $\alpha > 1/2$, mentre avrà una cuspide per $0 < \alpha \le 1/2$.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Utilizzando la formula risolutiva è sufficiente calcolare

$$-\int \frac{\sin x}{3+\cos x}\,dx = \log(3+\cos x) + C\,, \qquad \int \mathrm{e}^{\log(3+\cos x)}\cdot 1\,dx = \int (3+\cos x)\,dx = 3x + \sin x + C\,.$$

Pertanto, l'integrale generale sarà della forma

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-\log(3+\cos x)} + \mathrm{e}^{-\log(3+\cos x)}(3x+\sin x) = \frac{C+3x+\sin x}{3+\cos x}\,.$$

Esercizio 4

a) Riscrivendo $n^{\sqrt{n}} = 3^{\sqrt{n}\log_3 n}$, ricaviamo subito che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3^n - n^{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3^n - 3^{\sqrt{n}\log_3 n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 3^n\left(1 - 3^{\sqrt{n}\log_3 n - n}\right) = +\infty\,.$$

Infatti, ricordando gli ordini di infinito, si ottiene

$$\begin{aligned}(\log_3 n)/\sqrt{n} \to 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{n}\log_3 n - n = -n(-(\log_3 n)/\sqrt{n} + 1) \to -\infty \\ &\Longrightarrow \quad 3^{\sqrt{n}\log_3 n - n} \to 0\,.\end{aligned}$$

b) Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto (1+t)^\alpha$, con $t = 1/\log^2 n$ ed $\alpha = 1/2$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/\log n$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(\log n)^2}} - 1}{\sin^3\left(\frac{1}{\log n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\log^2 n}}{\frac{1}{\log^3 n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{2} = +\infty\,.$$

Esercizio 5

L'affermazione $a)$ è corretta; infatti, se $\sum a_n^{1/n}$ converge, in particolare, dovendo essere soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie, si ha $a_n^{1/n} \to 0$ e, poiché $0 < 1$, dal criterio della radice, si ricava che $\sum a_n$ converge.
L'affermazione $b)$, invece, è falsa. Basta, infatti, considerare la successione $a_n = 1/n^2$, che fornisce una serie convergente, ma è tale che $(1/n^2)^{1/n} \to 1 \neq 0$, quindi, non soddisfacendo la condizione necessaria per la convergenza, fornisce una serie divergente.

Esercizio 6

Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, utilizzando il Teorema di Fermat, imponiamo dapprima le condizioni di annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x = y + 2x - 2xy = 0\,, \\ f_y = x - x^2 = 0\,, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0\,, \\ y = 0\,, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = 1\,, \\ y = 2\,. \end{cases}$$

Quindi si trovano solo due punti stazionari $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (1,2)$. Calcolando la matrice Hessiana in tali punti si ottiene:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y & 1-2x \\ 1-2x & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$
$$\det\Big(H_f(P_1)\Big) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0\,, \qquad \det\Big(H_f(P_2)\Big) = \det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0\,.$$

Quindi entrambi i punti trovati sono selle.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che la funzione proposta è continua e positiva in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ pertanto, al fine di stabilire se l'integrale proposto converge, è sufficiente studiare il comportamento di f per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.

Per $x \to 0^+$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{x^{3\alpha+2}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{-2\alpha-2}}\,,$$

che è impropriamente integrabile per $-2\alpha - 2 < 1$, ovvero $\alpha > -3/2$.

Per $x \to +\infty$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{x^{3\alpha+2}\mathrm{e}^{\alpha x}}{\mathrm{e}^{\alpha x}} = \frac{1}{x^{-3\alpha-2}}\,,$$

che è impropriamente integrabile per $-3\alpha - 2 > 1$, ovvero $\alpha < -1$.

Pertanto, l'integrale proposto convergerà per $-3/2 < \alpha < -1$.

Esercizio 2

Osserviamo che, per $x \to 0$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{\log|x|}{|x|^\alpha}\,,$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$. Pertanto, la funzione proposta risulterà prolungabile con continuità in $x = 0$ solo per $\alpha < 0$ e, denotato con $\tilde{f}$ tale prolungamento, si avrà $\tilde{f}(0) = 0$. Studiando il rapporto incrementale di $\tilde{f}$ per tali valori di $\alpha < 0$, si ricava

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\log|x|}{|\sin x|^\alpha} - 0}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\log|x|}{|x|^\alpha}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \operatorname{sign}(x) \frac{\log|x|}{|x|^{1+\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1+\alpha < 0 \iff \alpha < -1; \\ \pm\infty & \text{se } 1+\alpha \geq 0 \iff \alpha \geq -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

In conclusione, la funzione prolungata sarà derivabile per $\alpha < -1$, mentre avrà una cuspide per $-1 \leq \alpha < 0$.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Utilizzando la formula risolutiva è sufficiente calcolare

$$\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\log\left(1+\cos^2 x\right) + C\,,$$

$$\int \mathrm{e}^{-\log\left(1+\cos^2 x\right)} \sin x\,dx = \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\arctan(\cos x) + C\,.$$

Pertanto, l'integrale generale sarà della forma

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\log\left(1+\cos^2 x\right)} + \mathrm{e}^{\log\left(1+\cos^2 x\right)}\left(-\arctan(\cos x)\right) = \left(1+\cos^2 x\right)\left(C - \arctan(\cos x)\right).$$

Esercizio 4

a) Riscrivendo $(\log n)^{\sqrt{n}} = 3^{\sqrt{n}\log_3(\log n)}$, ricaviamo subito che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3^n - (\log n)^{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3^n - 3^{\sqrt{n}\log_3(\log n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} 3^n\left(1 - 3^{\sqrt{n}\log_3(\log n) - n}\right) = +\infty\,.$$

Infatti, ricordando gli ordini di infinito, si ottiene

$$\begin{aligned}
[\log_3(\log n)]/\sqrt{n} \to 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{n}\log_3(\log n) - n = -n(-[\log_3(\log n)]/\sqrt{n} + 1) \to -\infty \\
&\Longrightarrow \quad 3^{\sqrt{n}\log_3(\log n) - n} \to 0\,.
\end{aligned}$$

b) Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto (1+t)^\alpha$, con $t = 1/\log^3 n$ ed $\alpha = 1/3$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/\log n$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{\log n}\right)}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{(\log n)^3}} - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\log^2 n}}{\frac{1}{3\log^3 n}} = \lim_{n\to+\infty} 3\log n = +\infty\,.$$

Esercizio 5
L'affermazione a) è corretta; infatti, se $\sum 1/a_n$ converge, in particolare, dovendo essere soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie, si ha $a_n \not\to 0$ e quindi, non soddisfacendo la condizione necessaria per la convergenza, $\sum a_n$ diverge.
L'affermazione b), invece, è falsa. Basta, infatti, considerare la successione $a_n = n$, che fornisce una serie divergente, ma è tale che $1/a_n = 1/n$. Pertanto, essendo quest'ultimo il termine generale della serie armonica, fornisce una serie non convergente.

Esercizio 6
Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, utilizzando il Teorema di Fermat, imponiamo dapprima le condizioni di annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x = y + 2x - 2xy = 0\,, \\ f_y = x - x^2 = 0\,, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0\,, \\ y = 0\,, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = 1\,, \\ y = 2\,. \end{cases}$$

Quindi si trovano solo due punti stazionari $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (1,2)$. Calcolando la matrice Hessiana in tali punti si ottiene:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y & 1-2x \\ 1-2x & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\det\Big(H_f(P_1)\Big) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0\,, \qquad \det\Big(H_f(P_2)\Big) = \det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0\,.$$

Quindi entrambi i punti trovati sono selle.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che la funzione proposta è continua e positiva in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ pertanto, al fine di stabilire se l'integrale proposto converge, è sufficiente studiare il comportamento di f per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.

Per $x \to 0^+$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto e^x$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{x^{3\alpha+3}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{-2\alpha-3}}\,,$$

che è impropriamente integrabile per $-2\alpha - 3 < 1$, ovvero $\alpha > -2$.

Per $x \to +\infty$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{x^{3\alpha+3}e^{\alpha x}}{e^{\alpha x}} = \frac{1}{x^{-3\alpha-3}}\,,$$

che è impropriamente integrabile per $-3\alpha - 3 > 1$, ovvero $\alpha < -4/3$.

Pertanto, l'integrale proposto convergerà per $-2 < \alpha < -4/3$.

Esercizio 2

Osserviamo che, per $x \to 0$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{|x|^{\alpha/2}}{\log|x|}\,,$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$. Pertanto, la funzione proposta risulterà prolungabile con continuità in $x = 0$ solo per $\alpha \geq 0$ e, denotato con $\tilde{f}$ tale prolungamento, si avrà $\tilde{f}(0) = 0$. Studiando il rapporto incrementale di $\tilde{f}$ per tali valori di $\alpha \geq 0$, si ricava

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\frac{|\sin x|^{\alpha/2}}{\log|x|} - 0}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{|x|^{\alpha/2}}{\log|x|}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \operatorname{sign}(x)\,\frac{|x|^{\alpha/2-1}}{\log|x|} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha/2 - 1 \geq 0 \iff \alpha \geq 2; \\ \pm\infty & \text{se } \alpha/2 - 1 < 0 \iff \alpha < 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

In conclusione, la funzione prolungata sarà derivabile per $\alpha \geq 2$, mentre avrà una cuspide per $0 \leq \alpha < 2$.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Utilizzando la formula risolutiva è sufficiente calcolare

$$\begin{aligned}
&-\int \frac{\sin(2x)}{3+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{2\sin x\cos x}{3+\cos^2 x}\,dx = \log\left(3+\cos^2 x\right) + C\,, \\
&\int e^{\log\left(3+\cos^2 x\right)} \sin x\,dx = \int (3+\cos^2 x)\sin x\,dx = -3\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, l'integrale generale sarà della forma

$$y(x) = Ce^{-\log\left(3+\cos^2 x\right)} + e^{-\log\left(3+\cos^2 x\right)}\left(-3\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right) = \frac{C - 3\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}}{3+\cos^2 x}\,.$$

Esercizio 4

a) Riscrivendo $(\sqrt{n})^{\log n} = 2^{\log n \log_2 \sqrt{n}}$, ricaviamo subito che

$$\lim_{n\to+\infty} \left[(\sqrt{n})^{\log n} - 2^n\right] = \lim_{n\to+\infty} \left(2^{\log n \log_2 \sqrt{n}} - 2^n\right) = \lim_{n\to+\infty} -2^n \left(-2^{\log n \log_2 \sqrt{n} - n} + 1\right) = -\infty\,.$$

Infatti, ricordando gli ordini di infinito, si ottiene

$$\frac{1}{2n\log 2}\log^2 n \to 0 \implies \log n \log_2 \sqrt{n} - n = -n\left(-\frac{1}{2n\log 2}\log^2 n + 1\right) \to -\infty$$
$$\implies 2^{\log n \log_2 \sqrt{n} - n} \to 0\,.$$

b) Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto (1+t)^\alpha$, con $t = 1/\log n$ ed $\alpha = 1/2$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/\log n$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\log n}\right)^3}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\log n}} - 1\right)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\log^3 n}}{\frac{1}{4\log^2 n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\log n} = 0\,.$$

Esercizio 5

L'affermazione *a*) è falsa. Basta, infatti, considerare la successione $a_n = n$, che fornisce una serie divergente, ma è tale che $1/a_n = 1/n$. Pertanto, essendo quest'ultimo il termine generale della serie armonica, fornisce una serie non convergente.

L'affermazione *b*), invece, è corretta; infatti, se $\sum 1/a_n$ converge, in particolare, dovendo essere soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie, si ha $a_n \not\to 0$ e quindi, non soddisfacendo la condizione necessaria per la convergenza, $\sum a_n$ diverge.

Esercizio 6

Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, utilizzando il Teorema di Fermat, imponiamo dapprima le condizioni di annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x = y + 2x - 2xy = 0\,, \\ f_y = x - x^2 = 0\,, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0\,, \\ y = 0\,, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = 1\,, \\ y = 2\,. \end{cases}$$

Quindi si trovano solo due punti stazionari $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (1,2)$. Calcolando la matrice Hessiana in tali punti si ottiene:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y & 1-2x \\ 1-2x & 0 \end{pmatrix} \implies$$
$$\det\Big(H_f(P_1)\Big) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0\,, \qquad \det\Big(H_f(P_2)\Big) = \det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0\,.$$

Quindi entrambi i punti trovati sono selle.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che la funzione proposta è continua e positiva in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ pertanto, al fine di stabilire se l'integrale proposto converge, è sufficiente studiare il comportamento di f per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.

Per $x \to 0^+$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = \alpha x$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{\alpha x}{x^{3\alpha/2}} = \frac{\alpha}{x^{3\alpha/2-1}} \,,$$

che è impropriamente integrabile per $3\alpha/2 - 1 < 1$, ovvero $\alpha < 4/3$.

Per $x \to +\infty$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^{3\alpha/2}\mathrm{e}^{\alpha x}} = \frac{1}{x^{3\alpha/2}} \,,$$

che è impropriamente integrabile per $3\alpha/2 > 1$, ovvero $\alpha > 2/3$.

Pertanto, l'integrale proposto convergerà per $2/3 < \alpha < 4/3$.

Esercizio 2

Osserviamo che, per $x \to 0$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{2^{2\alpha}}{|x|^{4\alpha} \log |x|} \,,$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \cos x$. Pertanto, la funzione proposta risulterà prolungabile con continuità in $x = 0$ solo per $\alpha \le 0$ e, denotato con $\tilde{f}$ tale prolungamento, si avrà $\tilde{f}(0) = 0$. Studiando il rapporto incrementale di $\tilde{f}$ per tali valori di $\alpha \le 0$, si ricava

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1-\cos x)^{2\alpha} \log |x|} - 0}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2^{2\alpha}}{|x|^{4\alpha} \log |x|}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \operatorname{sign}(x) \frac{2^{2\alpha}}{|x|^{4\alpha+1} \log |x|} = \begin{cases} 0 & \text{se } 4\alpha + 1 \le 0 \iff \alpha \le -1/4; \\ \pm\infty & \text{se } 4\alpha + 1 > 0 \iff \alpha > -1/4. \end{cases}\end{aligned}$$

In conclusione, la funzione prolungata sarà derivabile per $\alpha \le -1/4$, mentre per $-1/4 < \alpha \le 0$ avrà una cuspide.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Utilizzando la formula risolutiva è sufficiente calcolare

$$\int \frac{\sin x}{3 + \cos x}\, dx = -\log(3 + \cos x) + C \,, \qquad \int \mathrm{e}^{-\log(3+\cos x)} (9 - \cos^2 x)\, dx = \int (3 - \cos x)\, dx = 3x - \sin x + C \,.$$

Pertanto, l'integrale generale sarà della forma

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\log(3+\cos x)} + \mathrm{e}^{\log(3+\cos x)} (3x - \sin x) = (3 + \cos x)(C + 3x - \sin x) \,.$$

Esercizio 4

a) Riscrivendo $n^{\sqrt{\log n}} = 2^{\sqrt{\log n} \log_2 n}$, ricaviamo subito che

$$\lim_{n\to+\infty} \left[n^{\sqrt{\log n}} - 2^n\right] = \lim_{n\to+\infty} \left(2^{\sqrt{\log n}\log_2 n} - 2^n\right) = \lim_{n\to+\infty} -2^n \left(-2^{\sqrt{\log n}\log_2 n - n} + 1\right) = -\infty \,.$$

Infatti, ricordando gli ordini di infinito, si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{(\log n)^{3/2}}{n \log 2} \to 0 \quad &\Longrightarrow \sqrt{\log n} \log_2 n - n = -n \left(-\frac{(\log n)^{3/2}}{n \log 2} + 1\right) \to -\infty \\ &\Longrightarrow 2^{\sqrt{\log n}\log_2 n - n} \to 0 \,.\end{aligned}$$

b) Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto (1+t)^\alpha$, con $t = 1/\log^3 n$ ed $\alpha = 1/3$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/\log n$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{(\log n)^3}}-1}{\sin\left(\frac{1}{\log n}\right)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3\log^3 n}}{\frac{1}{\log^2 n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3\log n} = 0\,.$$

Esercizio 5

L'affermazione $a)$ è falsa. Basta, infatti, considerare la successione $a_n = 1/n^2$, che fornisce una serie convergente, ma è tale che $(1/n^2)^{1/n} \to 1 \neq 0$, quindi, non soddisfacendo la condizione necessaria per la convergenza, fornisce una serie divergente.

L'affermazione $b)$, invece, è corretta; infatti, se $\sum a_n^{1/n}$ converge, in particolare, dovendo essere soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie, si ha $a_n^{1/n} \to 0$ e, poiché $0 < 1$, dal criterio della radice, si ricava che $\sum a_n$ converge.

Esercizio 6

Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, utilizzando il Teorema di Fermat, imponiamo dapprima le condizioni di annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x = y + 2x - 2xy = 0\,, \\ f_y = x - x^2 = 0\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0\,, \\ y = 0\,, \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x = 1\,, \\ y = 2\,. \end{cases}$$

Quindi si trovano solo due punti stazionari $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (1,2)$. Calcolando la matrice Hessiana in tali punti si ottiene:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y & 1-2x \\ 1-2x & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

$$\det\Big(H_f(P_1)\Big) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0\,, \qquad \det\Big(H_f(P_2)\Big) = \det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0\,.$$

Quindi entrambi i punti trovati sono selle.