| **A N A L I S I / A** | cognome e nome | matricola |
|---|---|---|
| 11 aprile 2003 | | |

**E1.** Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -7x & x \le 1/\mathrm{e} \ ; \\ x\dfrac{2\log x - 5}{\log x + 2} & x > 1/\mathrm{e} \ . \end{cases}$$

**1.1*** Determinare campo di esistenza, limiti alla frontiera ed eventuali asintoti.

**1.2** Studiare continuità, derivabilità, monotonia, concavità e convessità. Tracciare il grafico di $f$.

---

**E2.** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, sia data la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{x^2 |\arctan x|^\alpha}{(3+x^2)(1+|x|)^{-2\alpha}} \ .$$

**2.1*** Per $\alpha = 0$, calcolare $\int_0^1 f_0(x)\ dx$ .

**2.2** Mostrare che per $\alpha > 0$ l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\ dx$ è infinito.

---

**E3*.** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2xy'(x) = y^2(x) \ , \\ y(1) = 3 \ . \end{cases}$$

---

**E4.** Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^3}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$.

---

**D1.**

**1.1*** Scrivere la definizione di successione monotona crescente.

**1.2** Fornire un esempio di successione crescente limitata superiormente ed un esempio di successione crescente illimitata superiormente.

---

**D2.**

**2.1*** Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, scrivere la definizione di derivabilità parziale di $f$ rispetto ad $y$ nel punto $(3,5)$.

**2.2** Mostrare con un esempio che la derivabilità parziale non implica la continuità.

---

Tempo: 3 ore . Per superare l'esame è necessario svolgere almeno gli esercizi e le domande contrassegnate da asterisco.

| **A N A L I S I / B** | cognome e nome | matricola |
|---|---|---|
| 11 aprile 2003 | | |

**E1.** Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 7x & x \le 1\ ; \\ x\dfrac{7 - 2\log x}{\log x + 1} & x > 1\ . \end{cases}$$

**1.1*** Determinare campo di esistenza, limiti alla frontiera ed eventuali asintoti.

**1.2** Studiare continuità, derivabilità, monotonia, concavità e convessità. Tracciare il grafico di $f$.

---

**E2.** Per ogni $\alpha \in I\!R$, sia data la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{2x|\arctan x|^{-2\alpha}}{(1+2x)(1+x^2)^\alpha}\ .$$

**2.1*** Per $\alpha = 0$, calcolare $\int_0^1 f_0(x)\ dx$ .

**2.2** Mostrare che per $\alpha < 0$ l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\ dx$ è infinito.

---

**E3*.** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y'(x) = y^2(x)\ , \\ y(1) = 1\ . \end{cases}$$

---

**E4.** Stabilire per quali valori di $\alpha \in I\!R$ la funzione $f : I\!R^2 \to I\!R$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2)}{(x^2+y^2)^{3\alpha}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $I\!R^2$.

---

**D1.**

**1.1*** Scrivere la definizione di successione monotona decrescente.

**1.2** Fornire un esempio di successione decrescente limitata inferiormente ed un esempio di successione decrescente illimitata inferiormente.

---

**D2.**

**2.1*** Data $f : I\!R^2 \to I\!R$, scrivere la definizione di derivabilità parziale di $f$ rispetto ad $x$ nel punto $(9,3)$.

**2.2** Mostrare con un esempio che la derivabilità parziale non implica la continuità.

---

Tempo: 3 ore . Per superare l'esame è necessario svolgere almeno gli esercizi e le domande contrassegnate da asterisco.