SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

a) Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è data $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà dato da $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. Tenendo conto che il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea associata, la soluzione particolare si può ottenere applicando il metodo di somiglianza, da cui $y_p(x) = A e^{-x}$. Sostituendo nell'equazione si ricava $A = -2$, da cui si ottiene che l'integrale generale dell'equazione completa è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 2e^{-x}\,.$$

b) Imponendo le condizioni iniziali, si giunge al sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 2 = -4 \\ C_1 - 2C_2 + 2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 3C_2 - 4 = -4 \\ C_1 - 2C_2 + 2 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $C_1 = -2$ e $C_2 = 0$. Pertanto la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = -2e^x - 2e^{-x} = -4\cosh x\,.$$

c) Imponendo invece la condizione di limite sull'integrale generale, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \left[C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 2e^{-x}\right] = 0\,.$$

Tale condizione è verificata se e solo se $C_1 = 0$. Quindi si ricava che l'equazione differenziale proposta ha un'infinità di soluzioni, soddisfacenti la condizione di limite assegnata, data dalla famiglia delle funzioni

$$y(x) = C_2 e^{-2x} - 2e^{-x}, \qquad C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che l'insieme T è il triangolo chiuso, delimitato dagli assi x e y e dalla retta $y = x+1$, e che la funzione f, essendo un polinomio, è continua su tale insieme. Pertanto, il Teorema di Weierstrass garantisce che f ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti in T.

Per determinare tali estremanti, notiamo che si ha $f(x,y) \le 0$ in T ed $f(x,y) \equiv 0$ sui tre lati $a = \{-1 \le x \le 0\,,\ y = 0\}$, $b = \{x = 0\,,\ 0 \le y \le 1\}$ e $c = \{-1 \le x \le 0\,,\ y = x+1\}$. Pertanto, tutti i punti del bordo del triangolo T sono punti di massimo assoluto per f in tale insieme.

Tenendo conto del Teorema di Weierstrass, sappiamo che all'interno di T ci sarà almeno un punto di minimo assoluto e, poiché l'interno di T è un insieme aperto ed f è regolare, per determinarlo, possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Annulliamo, quindi, il gradiente di f e otteniamo:

$$\begin{cases} 2xy^2 - 3x^2y - 2xy = 0 \\ 2x^2y - x^3 - x^2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 2y - 3x - 2 = 0 \\ 2y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(x,y) = (-1/2, 1/4)$. Poiché abbiamo trovato un unico punto stazionario all'interno di T, sappiamo che esso è necessariamente il punto di minimo assoluto cercato.

Esercizio 3

Poiché l'insieme di integrazione è un rettangolo e la funzione $f(x,y) = x\,e^{2x^2+y} = x\,e^{2x^2}\cdot e^y$ è a variabili separabili, dal Teorema di Riduzione per gli integrali doppi si ricava

$$\iint_E x\,e^{2x^2+y}\,dxdy = \left(\int_{-1}^0 x\,e^{2x^2}\,dx\right)\left(\int_0^2 e^y\,dy\right) = \left(\frac{1}{4}\,e^{2x^2}\Big|_{-1}^0\right)\left(e^y\Big|_0^2\right) = \frac{1}{4}(1-e^2)(e^2-1) = -\frac{1}{4}(e^2-1)^2.$$

Domanda 1

Poiché f, e quindi anche $f(x)/x$, è una funzione continua nell'intervallo $(0,1]$, è sufficiente studiare il comportamento dell'integrando in un intorno destro di $x=0$. Tenendo presente che f è una funzione positiva ed utilizzando i Teoremi del confronto e del confronto asintotico per gli integrali impropri, si ottiene che, per $x \to 0^+$,

a) $\frac{f(x)}{x} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$, che non è impropriamente integrabile;
d) $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$, che non dà alcuna informazione;
c) $\frac{f(x)}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, che è impropriamente integrabile.

Quindi, la condizione c) assicura la convergenza dell'integrale proposto, escludendo automaticamente anche la risposta b).

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

a) Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è data $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà dato da $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}$. Tenendo conto che il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea associata, la soluzione particolare si può ottenere applicando il metodo di somiglianza, da cui $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$. Sostituendo nell'equazione si ricava $A = 1$, da cui si ottiene che l'integrale generale dell'equazione completa è dato da

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x .$$

b) Imponendo le condizioni iniziali, si giunge al sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ -C_1 + 2C_2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 3C_2 + 2 = 2 \\ -C_1 + 2C_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$. Pertanto la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x = 2\cosh x .$$

c) Imponendo invece la condizione di limite sull'integrale generale, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \left[C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x\right] = 0 .$$

Tale condizione è verificata se e solo se $C_1 = 0$. Quindi si ricava che l'equazione differenziale proposta ha un'infinità di soluzioni, soddisfacenti la condizione di limite assegnata, data dalla famiglia delle funzioni

$$y(x) = C_2 \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x, \qquad C_2 \in \mathbb{R} .$$

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che l'insieme T è il triangolo chiuso, delimitato dagli assi x e y e dalla retta $y = -x + 1$, e che la funzione f, essendo un polinomio, è continua su tale insieme. Pertanto, il Teorema di Weierstrass garantisce che f ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti in T.
Per determinare tali estremanti, notiamo che si ha $f(x, y) \geq 0$ in T ed $f(x, y) \equiv 0$ sui tre lati $a = \{-1 \leq x \leq 0\, , \, y = 0\}$, $b = \{x = 0\, , \, 0 \leq y \leq 1\}$ e $c = \{-1 \leq x \leq 0\, , \, y = -x + 1\}$. Pertanto, tutti i punti del bordo del triangolo T sono punti di minimo assoluto per f in tale insieme.
Tenendo conto del Teorema di Weierstrass, sappiamo che all'interno di T ci sarà almeno un punto di massimo assoluto e, poiché l'interno di T è un insieme aperto ed f è regolare, per determinarlo, possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Annulliamo, quindi, il gradiente di f e otteniamo:

$$\begin{cases} -y^3 - 2xy^2 + y^2 = 0 \\ -3xy^2 - 2x^2y + 2xy = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -y - 2x + 1 = 0 \\ -3y - 2x + 2 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(x, y) = (1/4, 1/2)$. Poiché abbiamo trovato un unico punto stazionario all'interno di T, sappiamo che esso è necessariamente il punto di massimo assoluto cercato.

Esercizio 3

Poiché l'insieme di integrazione è un rettangolo e la funzione $f(x, y) = 3y\, \mathrm{e}^{2x+y^2} = \mathrm{e}^{2x} \cdot 3y\, \mathrm{e}^{y^2}$ è a variabili separabili, dal Teorema di Riduzione per gli integrali doppi si ricava

$$\iint_E 3y\, \mathrm{e}^{2x+y^2}\, dxdy = \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\, dx\right)\left(\int_{-2}^0 3y\, \mathrm{e}^{y^2}\, dy\right) = \left(\frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1\right)\left(\frac{3}{2}\, \mathrm{e}^{y^2}\Big|_{-2}^0\right) = \frac{3}{4}(\mathrm{e}^2 - 1)(1 - \mathrm{e}^4).$$

Domanda 1

Poiché f, e quindi anche $f(x)/x$, è una funzione continua nell'intervallo $[1, +\infty)$, è sufficiente studiare il comportamento dell'integrando per $x \to +\infty$. Tenendo presente che f è una funzione positiva ed utilizzando i Teoremi del confronto e del confronto asintotico per gli integrali impropri, si ottiene che, per $x \to +\infty$,

b) $\frac{f(x)}{x} \sim 1$, che non è impropriamente integrabile;

c) $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$, che non dà alcuna informazione;

d) $\frac{f(x)}{x} \sim \frac{1}{x^2}$, che è impropriamente integrabile.

Quindi, la condizione d) assicura la convergenza dell'integrale proposto, escludendo automaticamente anche la risposta a).

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

a) Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è data $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà dato da $y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$. Tenendo conto che il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea associata, la soluzione particolare si può ottenere applicando il metodo di somiglianza, da cui $y_p(x) = A e^{3x}$. Sostituendo nell'equazione si ricava $A = 4$, da cui si ottiene che l'integrale generale dell'equazione completa è dato da

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 4e^{3x}\,.$$

b) Imponendo le condizioni iniziali, si giunge al sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 4 = 0 \\ -C_1 + 2C_2 + 12 = 16 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 + 4 = 0 \\ 3C_2 + 16 = 16 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $C_1 = -4$ e $C_2 = 0$. Pertanto la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = -4e^{-x} + 4e^{3x}\,.$$

c) Imponendo invece la condizione di limite sull'integrale generale, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \left[C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 4e^{3x}\right] = 0\,.$$

Tale condizione è verificata se e solo se $C_1 = 0$. Quindi si ricava che l'equazione differenziale proposta ha un'infinità di soluzioni, soddisfacenti la condizione di limite assegnata, data dalla famiglia delle funzioni

$$y(x) = C_2 e^{2x} + 4e^{3x}, \qquad C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che l'insieme T è il triangolo chiuso, delimitato dagli assi x e y e dalla retta $y = x-1$, e che la funzione f, essendo un polinomio, è continua su tale insieme. Pertanto, il Teorema di Weierstrass garantisce che f ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti in T.
Per determinare tali estremanti, notiamo che si ha $f(x,y) \geq 0$ in T ed $f(x,y) \equiv 0$ sui tre lati $a = \{-1 \leq x \leq 0\,,\ y = 0\}$, $b = \{x = 0\,,\ 0 \leq y \leq 1\}$ e $c = \{-1 \leq x \leq 0\,,\ y = x-1\}$. Pertanto, tutti i punti del bordo del triangolo T sono punti di minimo assoluto per f in tale insieme.
Tenendo conto del Teorema di Weierstrass, sappiamo che all'interno di T ci sarà almeno un punto di massimo assoluto e, poiché l'interno di T è un insieme aperto ed f è regolare, per determinarlo, possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Annulliamo, quindi, il gradiente di f e otteniamo:

$$\begin{cases} y^3 - 2xy^2 + y^2 = 0 \\ 3xy^2 - 2x^2y + 2xy = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ 3y - 2x + 2 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(x,y) = (1/4, -1/2)$. Poiché abbiamo trovato un unico punto stazionario all'interno di T, sappiamo che esso è necessariamente il punto di massimo assoluto cercato.

Esercizio 3

Poiché l'insieme di integrazione è un rettangolo e la funzione $f(x,y) = y\,e^{x+4y^2} = e^x \cdot y\,e^{4y^2}$ è a variabili separabili, dal Teorema di Riduzione per gli integrali doppi si ricava

$$\iint_E y\,e^{x+4y^2}\,dxdy = \left(\int_0^2 e^x\,dx\right)\left(\int_{-1}^0 y\,e^{4y^2}\,dy\right) = \left(e^x\Big|_0^2\right)\left(\frac{1}{8}\,e^{4y^2}\Big|_{-1}^0\right) = \frac{1}{8}(e^2-1)(1-e^4).$$

Domanda 1

Poiché f, e quindi anche $f(x)/x^2$, è una funzione continua nell'intervallo $[1, +\infty)$, è sufficiente studiare il comportamento dell'integrando per $x \to +\infty$. Tenendo presente che f è una funzione positiva ed utilizzando i Teoremi del confronto e del confronto asintotico per gli integrali impropri, si ottiene che, per $x \to +\infty$,

b) $\frac{f(x)}{x^2} \sim \frac{1}{x}$, che non è impropriamente integrabile;

d) $\frac{f(x)}{x^2} \geq \frac{1}{x^2}$, che non dà alcuna informazione;

a) $\frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, che è impropriamente integrabile.

Quindi, la condizione a) assicura la convergenza dell'integrale proposto, escludendo automaticamente anche la risposta c).

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

a) Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è data $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà dato da $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. Tenendo conto che il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea associata, la soluzione particolare si può ottenere applicando il metodo di somiglianza, da cui $y_p(x) = A e^{-3x}$. Sostituendo nell'equazione si ricava $A = -2$, da cui si ottiene che l'integrale generale dell'equazione completa è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 2e^{-3x}\,.$$

b) Imponendo le condizioni iniziali, si giunge al sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 2 = 0 \\ C_1 - 2C_2 + 6 = 8 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 - 2 = 0 \\ 3C_2 - 8 = -8 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $C_1 = 2$ e $C_2 = 0$. Pertanto la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = 2e^x - 2e^{-3x}\,.$$

c) Imponendo invece la condizione di limite sull'integrale generale, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \left[C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 2e^{-3x}\right] = 0\,.$$

Tale condizione è verificata se e solo se $C_1 = 0$. Quindi si ricava che l'equazione differenziale proposta ha un'infinità di soluzioni, soddisfacenti la condizione di limite assegnata, data dalla famiglia delle funzioni

$$y(x) = C_2 e^{-2x} - 2e^{-3x}, \qquad C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che l'insieme T è il triangolo chiuso, delimitato dagli assi x e y e dalla retta $y = -x - 1$, e che la funzione f, essendo un polinomio, è continua su tale insieme. Pertanto, il Teorema di Weierstrass garantisce che f ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti in T.
Per determinare tali estremanti, notiamo che si ha $f(x, y) \le 0$ in T ed $f(x, y) \equiv 0$ sui tre lati $a = \{-1 \le x \le 0\,,\, y = 0\}$, $b = \{x = 0\,,\, -1 \le y \le 0\}$ e $c = \{-1 \le x \le 0\,,\, y = -x - 1\}$. Pertanto, tutti i punti del bordo del triangolo T sono punti di massimo assoluto per f in tale insieme.
Tenendo conto del Teorema di Weierstrass, sappiamo che all'interno di T ci sarà almeno un punto di minimo assoluto e, poiché l'interno di T è un insieme aperto ed f è regolare, per determinarlo, possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Annulliamo, quindi, il gradiente di f e otteniamo:

$$\begin{cases} 2xy^2 + 3x^2y + 2xy = 0 \\ 2x^2y + x^3 + x^2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 2y + 3x + 2 = 0 \\ 2y + x + 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(x, y) = (-1/2, -1/4)$. Poiché abbiamo trovato un unico punto stazionario all'interno di T, sappiamo che esso è necessariamente il punto di minimo assoluto cercato.

Esercizio 3

Poiché l'insieme di integrazione è un rettangolo e la funzione $f(x, y) = 4x\, e^{x^2+2y} = 4x\, e^{x^2} \cdot e^{2y}$ è a variabili separabili, dal Teorema di Riduzione per gli integrali doppi si ricava

$$\iint_E 4x\, e^{x^2+2y}\, dxdy = \left(\int_{-2}^{0} 4x\, e^{x^2}\, dx\right)\left(\int_0^1 e^{2y}\, dy\right) = \left(2\, e^{x^2}\Big|_{-2}^{0}\right)\left(\frac{1}{2}\, e^{2y}\Big|_0^1\right) = (1 - e^4)(e^2 - 1).$$

Domanda 1

Poiché f, e quindi anche $f(x)/\sqrt{x}$, è una funzione continua nell'intervallo $(0,1]$, è sufficiente studiare il comportamento dell'integrando in un intorno destro di $x = 0$. Tenendo presente che f è una funzione positiva ed utilizzando i Teoremi del confronto e del confronto asintotico per gli integrali impropri, si ottiene che, per $x \to 0^+$,

a) $\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$, che non dà alcuna informazione;

c) $\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x}$, che non è impropriamente integrabile;

b) $\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, che è impropriamente integrabile.

Quindi, la condizione b) assicura la convergenza dell'integrale proposto, escludendo automaticamente anche la risposta d).