SOLUZIONI COMPITO del 12/01/2015
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1
Poiché $i^{243} = i^3 = -i$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $\frac{1}{z^2} - i = 1$, ovvero $\frac{1}{z^2} = 1 + i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$, da cui si ricava

$$z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4} \qquad \Longrightarrow \qquad z = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\mathrm{e}^{-i\pi/8}\,, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\mathrm{e}^{i7\pi/8}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2
Osserviamo che possiamo riscrivere

$$a_n := \left[\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{-n} - 1\right] = \left[\mathrm{e}^{-n\log\left(1+\cos\frac{1}{n}-1\right)} - 1\right] \geq 0\,.$$

Tenendo conto che

$$-n\log\left(1 + \cos\frac{1}{n} - 1\right) \sim -n\left[\cos\frac{1}{n} - 1\right] \sim n\,\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n} \to 0\,,$$

e che $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$, per $x \to 0$, con $x = -n\log\left(1 + \cos\frac{1}{n} - 1\right)$, si ricava subito che $a_n \sim \frac{1}{2n}$ e quindi, per confronto asintotico con la serie armonica, la serie proposta diverge a $+\infty$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1 \pm 2i$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = \mathrm{e}^x[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)]$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^x$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^x$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$A\mathrm{e}^x - 2A\mathrm{e}^x + 5A\mathrm{e}^x = 4\mathrm{e}^x \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = \mathrm{e}^x[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)] + \mathrm{e}^x$. Imponendo ora la condizione richiesta, otteniamo

$$\begin{cases} C_1 + 1 = 0\,, \\ \mathrm{e}^{\pi/2}(1 - C_1) = 0\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_1 = -1 \text{ e } C_1 = 1.$$

Pertanto il sistema è impossibile e quindi non esiste alcuna soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente la condizione richiesta.

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione $t = \sqrt{x}$, da cui $2dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$, si ricava

$$\begin{aligned}\int \frac{\log[\log(1+\sqrt{x})^2]}{(x+\sqrt{x})}\, dx &= 2\int \frac{\log[2\log(1+t)]}{(t+1)}\, dt \\ &= 2\left[\log(1+t)\cdot\log[2\log(1+t)] - \int \log(1+t)\,\frac{1}{(1+t)\log(1+t)}\, dt\right] \\ &= 2\left[\log(1+t)\cdot\log[2\log(1+t)] - \int \frac{1}{(1+t)}\, dt\right] \\ &= 2\log(1+\sqrt{x})\cdot\log[2\log(1+\sqrt{x})] - 2\log(1+\sqrt{x}) + C\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che $1 + t > 0$ e quindi abbiamo eliminato il valore assoluto nell'integrazione. Imponendo, ora, la condizione richiesta otteniamo

$$\begin{aligned}&1+\log 4 = 2\log(1+\sqrt{(\mathrm{e}-1)^2})\cdot\log[2\log(1+\sqrt{(\mathrm{e}-1)^2})] - 2\log(1+\sqrt{(\mathrm{e}-1)^2}) + C \\ &= 2\log 2 - 2 + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = 3\,.\end{aligned}$$

Pertanto, la primitiva cercata sarà $\phi(x) = 2\log(1+\sqrt{x})\cdot\log[2\log(1+\sqrt{x})] - 2\log(1+\sqrt{x}) + 3$.

Esercizio 5

Per ipotesi, $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; inoltre, poiché $f(0) = 0$ ed f è strettamente crescente, avremo che $f(x) > 0$ per $x > 0$ ed $f(x) < 0$ per $x < 0$. Osserviamo, inoltre, che dal teorema di derivazione della funzione composta si ha $g'(x) = 2f(x)f'(x)$; pertanto, ricaviamo subito che

$$g'(x)\begin{cases} > 0 & \text{per } x > 0, \\ = 0 & \text{per } x = 0, \\ < 0 & \text{per } x < 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{ovvero } x = 0 \text{ è punto di minimo.}$$

TEMA B

Esercizio 1

Poiché $i^{167} = i^3 = -i$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $\frac{1}{z^2} - i = -1$, ovvero $\frac{1}{z^2} = -1 + i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i3\pi/4}$, da cui si ricava

$$z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i3\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i3\pi/4} \qquad \Longrightarrow \qquad z = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i3\pi/4}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\mathrm{e}^{-i3\pi/8}\,, \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\mathrm{e}^{i5\pi/8}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$a_n := \left[n^{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)} - 1\right] = \left[\mathrm{e}^{[1-\cos(1/n)]\log n} - 1\right] \geq 0\,.$$

Tenendo conto che

$$[1-\cos(1/n)]\log n \sim \frac{1}{2n^2}\log n = \frac{1}{2n^2(\log n)^{-1}} \to 0\,,$$

e che $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$, per $x \to 0$, con $x = [1-\cos(1/n)]\log n$, si ricava subito che $a_n \sim \frac{1}{2n^2(\log n)^{-1}}$ e quindi, per confronto asintotico con la serie di Abel di esponenti $p = 2$ e $q = -1$, la serie proposta converge.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 2 \pm i$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = \mathrm{e}^{2x}[C_1\cos x + C_2\sin x]$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$, da cui $y_p'(x) = 2A\mathrm{e}^{2x}$ e $y_p''(x) = 4A\mathrm{e}^{2x}$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$4A\mathrm{e}^{2x} - 8A\mathrm{e}^{2x} + 5A\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = \mathrm{e}^{2x}[C_1\cos x + C_2\sin x] + \mathrm{e}^{2x}$. Imponendo ora la condizione richiesta, otteniamo

$$\begin{cases} C_1 + 1 = 0\,, \\ \mathrm{e}^{4\pi}(C_1+1) = 0\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_1 = -1 \text{ e } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi esistono inifinite soluzioni dell'equazione differenziale soddisfacenti la condizione richiesta e sono date da $y(x) = \mathrm{e}^{2x}[-\cos x + C_2\sin x] + \mathrm{e}^{2x}$.

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione $t = \sqrt{x^3}$, da cui $\frac{2}{3}dt = \sqrt{x}\,dx$, si ricava

$$\begin{aligned} \int (x^2+\sqrt{x})\,\mathrm{e}^{1+\sqrt{x^3}}\,dx &= \frac{2}{3}\int (t+1)\,\mathrm{e}^{1+t}\,dt = \frac{2}{3}\left[(t+1)\,\mathrm{e}^{1+t} - \int \mathrm{e}^{1+t}\,dt\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[(t+1)\,\mathrm{e}^{1+t} - \mathrm{e}^{1+t}\right] = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\mathrm{e}^{1+\sqrt{x^3}} + C\,. \end{aligned}$$

Imponendo, ora, la condizione richiesta otteniamo

$$\frac{2}{3}(\mathrm{e}^2+1) = \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^2 + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{2}{3}\,.$$

Pertanto, la primitiva cercata sarà $\phi(x) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3}\,\mathrm{e}^{1+\sqrt{x^3}} + 1\right)$.

Esercizio 5

Per ipotesi, $x = 0$ è l'unico punto stazionario, quindi $f'(x) \neq 0$ per $x \neq 0$. Inoltre, $x = 0$ è punto di massimo assoluto stretto con $f(0) = 0$, pertanto $f(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$ e $f'(x) > 0$ per $x < 0$, mentre $f'(x) < 0$ per $x > 0$. Osserviamo, infine, che dal teorema di derivazione della funzione composta si ha $g'(x) = 4[f(x)]^3 f'(x)$; pertanto, ricaviamo subito che

$$g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x > 0, \\ = 0 & \text{per } x = 0, \\ < 0 & \text{per } x < 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{ovvero } x = 0 \text{ è punto di minimo.}$$

TEMA C

Esercizio 1

Poiché $i^{181} = i^1 = i$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $\frac{1}{z^2} + i = -1$, ovvero $\frac{1}{z^2} = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$, da cui si ricava

$$z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,e^{i5\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-i5\pi/4} \qquad \Longrightarrow \qquad z = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-i5\pi/4}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{-i5\pi/8}\,, \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{i3\pi/8}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$a_n := \left[n^{\left(\cosh\frac{1}{n}-1\right)} - 1\right] = \left[e^{[\cosh(1/n)-1]\log n} - 1\right] \geq 0\,.$$

Tenendo conto che

$$[\cosh(1/n) - 1]\log n \sim \frac{1}{2n^2}\log n = \frac{1}{2n^2(\log n)^{-1}} \to 0\,,$$

e che $e^x - 1 \sim x$, per $x \to 0$, con $x = [\cosh(1/n) - 1]\log n$, si ricava subito che $a_n \sim \frac{1}{2n^2(\log n)^{-1}}$ e quindi, per confronto asintotico con la serie di Abel di esponenti $p = 2$ e $q = -1$, la serie proposta converge.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -2 \pm i$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = e^{-2x}[C_1 \cos x + C_2 \sin x]$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ae^{-2x}$, da cui $y_p'(x) = -2Ae^{-2x}$ e $y_p''(x) = 4Ae^{-2x}$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$4Ae^{-2x} - 8Ae^{-2x} + 5Ae^{-2x} = -e^{-2x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = -1\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = e^{-2x}[C_1 \cos x + C_2 \sin x] - e^{-2x}$. Imponendo ora la condizione richiesta, otteniamo

$$\begin{cases} -\,e^{-2\pi}(C_1 + 1) = 0\,, \\ -\,e^{-6\pi}(C_1 + 1) = 0\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_1 = -1 \text{ e } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi esistono inifinite soluzioni dell'equazione differenziale soddisfacenti la condizione richiesta e sono date da $y(x) = e^{-2x}[-\cos x + C_2 \sin x] - e^{-2x}$.

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione $t = \sqrt{x^5}$, da cui $\frac{2}{5}dt = \sqrt{x^3}\,dx$, si ricava

$$\begin{aligned} \int (x^4 + \sqrt{x^3})\,e^{1+\sqrt{x^5}}\,dx &= \frac{2}{5}\int (t+1)\,e^{1+t}\,dt = \frac{2}{5}\left[(t+1)\,e^{1+t} - \int e^{1+t}\,dt\right] \\ &= \frac{2}{5}\left[(t+1)\,e^{1+t} - e^{1+t}\right] = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}\,e^{1+\sqrt{x^5}} + C\,. \end{aligned}$$

Imponendo, ora, la condizione richiesta otteniamo

$$\frac{2}{5}(e^2 - 1) = \frac{2}{5}\,e^2 + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = -\frac{2}{5}\,.$$

Pertanto, la primitiva cercata sarà $\phi(x) = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x^5}\,e^{1+\sqrt{x^5}} - 1\right)$.

Esercizio 5

Per ipotesi, $x = 0$ è l'unico punto stazionario, quindi $f'(x) \neq 0$ per $x \neq 0$. Inoltre, $x = 0$ è punto di massimo assoluto stretto con $f(0) = 0$, pertanto $f(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$ e $f'(x) > 0$ per $x < 0$, mentre $f'(x) < 0$ per $x > 0$. Osserviamo, infine, che dal teorema di derivazione della funzione composta si ha $g'(x) = 4[f(x)]^3 f'(x)$; pertanto, ricaviamo subito che

$$g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x > 0, \\ = 0 & \text{per } x = 0, \\ < 0 & \text{per } x < 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{ovvero } x = 0 \text{ è punto di minimo.}$$

TEMA D

Esercizio 1

Poiché $i^{321} = i^1 = i$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $\frac{1}{z^2} + i = 1$, ovvero $\frac{1}{z^2} = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, da cui si ricava

$$z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{i\pi/4} \qquad \Longrightarrow \qquad z = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{i\pi/4}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{i\pi/8}\,, \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{i9\pi/8}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$a_n := \left[\left(\cosh\frac{1}{n}\right)^n - 1\right] = \left[e^{n\log\left(1+\cosh\frac{1}{n}-1\right)} - 1\right] \geq 0\,.$$

Tenendo conto che

$$n\log\left(1+\cosh\frac{1}{n}-1\right) \sim n\left[\cosh\frac{1}{n}-1\right] \sim n\,\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n} \to 0\,,$$

e che $e^x - 1 \sim x$, per $x \to 0$, con $x = n\log\left(1+\cosh\frac{1}{n}-1\right)$, si ricava subito che $a_n \sim \frac{1}{2n}$ e quindi, per confronto asintotico con la serie armonica, la serie proposta diverge a $+\infty$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1 \pm 2i$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = e^{-x}[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)]$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ae^{-x}$, da cui $y_p'(x) = -Ae^{-x}$ e $y_p''(x) = Ae^{-x}$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$Ae^{-x} - 2Ae^{-x} + 5Ae^{-x} = -4e^{-x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = -1\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = e^{-x}[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)] - e^{-x}$. Imponendo ora la condizione richiesta, otteniamo

$$\begin{cases} e^{-\pi/4}(C_2 - 1) = 0\,, \\ -\,e^{-3\pi/4}(C_2 + 1) = 0\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_2 = 1 \text{ e } C_2 = -1.$$

Pertanto il sistema è impossibile e quindi non esiste alcuna soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente la condizione richiesta.

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione $t = \sqrt[4]{x}$, da cui $4dt = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$, si ricava

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log[\log(1+\sqrt[4]{x})]}{(x+\sqrt[4]{x^3})}\,dx &= 4\int \frac{\log[\log(1+t)]}{(t+1)}\,dt \\
&= 4\left[\log(1+t)\cdot\log[\log(1+t)] - \int \log(1+t)\,\frac{1}{(1+t)\log(1+t)}\,dt\right] \\
&= 4\left[\log(1+t)\cdot\log[\log(1+t)] - \int \frac{1}{(1+t)}\,dt\right] \\
&= 4\log(1+\sqrt[4]{x})\cdot\log[\log(1+\sqrt[4]{x})] - 4\log(1+\sqrt[4]{x}) + C\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che $1 + t > 0$ e quindi abbiamo eliminato il valore assoluto nell'integrazione. Imponendo, ora, la condizione richiesta otteniamo

$$\begin{aligned}
0 &= 4\log(1+\sqrt[4]{(e-1)^4})\cdot\log[\log(1+\sqrt[4]{(e-1)^4})] - 4\log(1+\sqrt[4]{(e-1)^4}) + C \\
&= -4 + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = 4\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la primitiva cercata sarà $\phi(x) = 4\log(1+\sqrt[4]{x})\cdot\log[\log(1+\sqrt[4]{x})] - 4\log(1+\sqrt[4]{x}) + 4$.

Esercizio 5

Per ipotesi, $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; inoltre, poiché $f(0) = 0$ ed f è strettamente crescente, avremo che $f(x) > 0$ per $x > 0$ ed $f(x) < 0$ per $x < 0$. Osserviamo, inoltre, che dal teorema di derivazione della funzione composta si ha $g'(x) = 2f(x)f'(x)$; pertanto, ricaviamo subito che

$$g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x > 0, \\ = 0 & \text{per } x = 0, \\ < 0 & \text{per } x < 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{ovvero } x = 0 \text{ è punto di minimo.}$$