SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1. Ricordando la legge di derivazione dei rapporti e utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\ln x - \frac{1}{x}\arctan x}{\ln^2 x} = \frac{x\ln x - \arctan x - x^2\arctan x}{x(1+x^2)\ln^2 x} \ .$$

Esercizio 2. Poiché il numero complesso $3+3i$ si può scrivere in forma esponenziale come $3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}$, si ottiene

$$\sqrt[4]{3+3i} = \begin{cases} \sqrt[4]{3}\,\sqrt[8]{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\,\sqrt[8]{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{9\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\,\sqrt[8]{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{17\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\,\sqrt[8]{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{25\pi}{16}} \end{cases} .$$

Esercizio 3. Poiché l'equazione differenziale proposta è a variabili separabili e non ha soluzioni singolari, si ottiene $\int y^2\ dy = \int x^3\ dx$ che fornisce, una volta inserita la condizione iniziale,

$$\frac{y^3(x)}{3} = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} \qquad \text{ovvero} \qquad y(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}x^4 + 1} \ .$$

Esercizio 4. Effettuando una sostituzione in coordinate polari piane, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\cos^3\theta = 0 \ .$$

Esercizio 5.

C.E. $= I\!R \setminus \{0\}$, $\quad f(x) > 0 \quad \forall x \in$ C.E.;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ non ci sono asintoti obliqui a $+\infty$;

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$ $\quad y = 0$ asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty$ $\quad x = 0$ asintoto verticale a $0^\pm$;

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x}\frac{\mathrm{e}^x - 2}{(\mathrm{e}^x-1)^2} & \text{se } x > 0; \\ -\mathrm{e}^{2x}\frac{\mathrm{e}^x - 2}{(\mathrm{e}^x-1)^2} & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

$f'(x) < 0$ per $0 < x < \ln 2$; $\qquad f'(x) > 0$ per $x < 0$, $x > \ln 2$;

$f'(x) = 0$ per $x = \ln 2$ punto di minimo relativo ; $\quad f(\ln 2) = 4$.

Esercizio 6.
Osserviamo che

$$\lim_{nto+\infty} \frac{e^{n\alpha}\cos^3 n}{n(e^{2n}-1)} = \lim_{nto+\infty} \frac{\cos^3 n}{n} e^{(\alpha-2)n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \leq 2 \ ; \\ \text{caso di indecisione } 0\cdot\infty & \text{se } \alpha > 2 \ . \end{cases}$$

Tuttavia, nel caso $\alpha > 2$, il limite proposto non esiste, poiché $\frac{e^{(\alpha-2)n}}{n}$ è una successione divergente, mentre $\cos^3 n$ oscilla tra -1 ed 1.

Esercizio 7.
Per stabilire l'esistenza dell'integrale improprio proposto, dobbiamo studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno di 0^+ ed in un intorno di $+\infty$. Otteniamo

$$\begin{array}{lllll} U(0^+) & f(x) \sim \dfrac{x^{1/2}}{2} = \dfrac{1}{2x^{-1/2}} & \Longrightarrow & \text{esiste l'integrale improprio, poiché } -1/2 < 1; \\ U(+\infty) & f(x) \sim \dfrac{\pi/2}{3x^{9/2}} & \Longrightarrow & \text{esiste l'integrale improprio, poiché } 9/2 > 1. \end{array}$$

Pertanto, l'integrale improprio proposto esiste.

Domanda 1.
Poiché $3 + \sin\frac{1}{n} \to 3$, per $n \to +\infty$, per definizione di funzione continua si ha $\lim_{n\to+\infty} f\left(3+\sin\frac{1}{n}\right) = f(3)$.

Domanda 2.
Per esempio, si può scegliere un intervallo del tipo (a, b) con $a > -\infty$.

Domanda 3.
Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice monotona non decrescente se, per ogni coppia di numeri $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 \leq x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1. Ricordando la legge di derivazione dei rapporti e utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\arctan x - \frac{1}{1+x^2}\ln x}{\arctan^2 x} = \frac{\arctan x + x^2\arctan x - x\ln x}{x(1+x^2)\arctan^2 x} \ .$$

Esercizio 2. Poiché il numero complesso $3-3i$ si può scrivere in forma esponenziale come $3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}$, si ottiene

$$\sqrt[4]{3-3i} = \begin{cases} \sqrt[4]{3}\,\sqrt[8]{2}\ \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\,\sqrt[8]{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\,\sqrt[8]{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{15\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\,\sqrt[8]{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{23\pi}{16}} \end{cases} \ .$$

Esercizio 3. Poiché l'equazione differenziale proposta è a variabili separabili e non ha soluzioni singolari, si ottiene $\int y^4\ dy = \int x\ dx$ che fornisce, una volta inserita la condizione iniziale,

$$\frac{y^5(x)}{5} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \qquad \text{ovvero} \qquad y(x) = \sqrt[5]{\frac{5}{2}x^2+1} \ .$$

Esercizio 4. Effettuando una sostituzione in coordinate polari piane, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2n+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\sin^3\theta = 0 \ .$$

Esercizio 5.

C.E. $= I\!R \setminus \{0\}$, $\quad f(x) > 0 \ \ \forall x \in$ C.E.;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+ \qquad y=0$ asintoto orizzontale a $\pm\infty$;

$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty \qquad x=0$ asintoto verticale a $0^\pm$;

$$f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^x\,\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{(\mathrm{e}^{2x}-1)^2} & \text{se } x>0; \\ \mathrm{e}^x\,\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{(\mathrm{e}^{2x}-1)^2} & \text{se } x<0; \end{cases}$$

$f'(x) < 0$ per $x>0$; $\qquad f'(x) > 0$ per $x<0$.

Esercizio 6.
Osserviamo che

$$\lim_{nto+\infty} \frac{(e^{2n}-1)\cos^3 n}{ne^{n\alpha}} = \lim_{nto+\infty} \frac{\cos^3 n}{n} e^{(2-\alpha)n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \geq 2 \text{ ;} \\ \text{caso di indecisione } 0 \cdot \infty & \text{se } \alpha < 2 \text{ .} \end{cases}$$

Tuttavia, nel caso $\alpha < 2$, il limite proposto non esiste, poiché $\frac{e^{(2-\alpha)n}}{n}$ è una successione divergente, mentre $\cos^3 n$ oscilla tra -1 ed 1.

Esercizio 7.
Per stabilire l'esistenza dell'integrale improprio proposto, dobbiamo studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno di 0^+ ed in un intorno di $+\infty$. Otteniamo

$$\begin{array}{lllll} U(0^+) & f(x) \sim \dfrac{x^{1/2}}{3} = \dfrac{1}{3x^{-1/2}} & \Longrightarrow & \text{esiste l'integrale improprio, poiché } -1/2 < 1; \\ U(+\infty) & f(x) \sim \dfrac{1}{5x^3\pi/2} & \Longrightarrow & \text{esiste l'integrale improprio, poiché } 3 > 1. \end{array}$$

Pertanto, l'integrale improprio proposto esiste.

Domanda 1.
Poiché $2-\sin\frac{1}{n^2} \to 2$, per $n \to +\infty$, per definizione di funzione continua si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\left(2-\sin\frac{1}{n^2}\right) = f(2)$.

Domanda 2.
Per esempio, si può scegliere un intervallo del tipo (a, b) con $b < +\infty$.

Domanda 3.
Una funzione $f : I\!R \to I\!R$ si dice monotona non crescente se, per ogni coppia di numeri $x_1, x_2 \in I\!R$ tali che $x_1 \leq x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$.