12 SETTEMBRE 2003 — SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1.

- La funzione proposta è pari e definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = \mathbb{R}$. Inoltre,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e non ci sono asinototi orizzontali o obliqui per } x \to \pm\infty \ ,$$

$$\text{infatti} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{x^4} = \pm\infty \ .$$

- La funzione è continua in quanto prodotto e composizione di funzioni continue, inoltre $f(x) \geq 0$ in $\mathbb{R}$.
Monotonia:

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x^4}(1+4x^4) > 0 & \text{per } x > 0 \ ; \\ -\mathrm{e}^{x^4}(1+4x^4) < 0 & \text{per } x < 0 \ ; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \pm 1,$$

pertanto, f cresce per $x > 0$, decresce per $x < 0$, $x = 0$ è punto angoloso di minimo assoluto e $f(0) = 0$.
Concavità:

$$f''(x) = \begin{cases} 4x^3\mathrm{e}^{x^4}(5+4x^4) > 0 & \text{per } x > 0 \ ; \\ -4x^3\mathrm{e}^{x^4}(5+4x^4) > 0 & \text{per } x < 0 \ ; \end{cases}$$

pertanto f è sempre convessa.
Osserviamo che, più semplicemente, è possibile studiare la funzione $f(x) = x\mathrm{e}^{x^4}$ nell'intervallo $[0, +\infty)$ e poi disegnare il grafico globale per simmetria rispetto all'asse $x = 0$.
Il grafico è

Esercizio 2.

- Per $x = 3$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{3^3 + 4n^3} = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{27 + 4n^3}$$

che converge per il criterio del confronto asintotico, poiché $\frac{1}{27+4n^3} \sim \frac{1}{4n^3}$, che è il termine generale di una serie armonica generalizzata convergente, in quanto ha esponente maggiore di 1.

- Osserviamo che, per $x = 0$, la serie converge banalmente in quanto coincide con la serie nulla. Per $x > 0$ la serie è a termini positivi e si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^3 + 4n^x} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 4n^x} \ .$$

Poiché $\frac{1}{x^3+4n^x} \sim \frac{1}{4n^x}$, per $x > 1$ la serie proposta converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, mentre per $0 < x \leq 1$ essa diverge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente minore di 1.

Esercizio 3.

Ponendo $z = a + ib$ e sostituendo nell'equazione proposta, si ottiene $a - ib + 2a + 2ib = a^2 + b^2$, ovvero $3a + ib = a^2 + b^2$. Uguagliando parte reale ed immaginaria di ambo i membri, si ricava

$$\begin{cases} 3a = a^2 + b^2 \\ b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3a = a^2 \\ b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a(a-3) = 0 \\ b = 0 \end{cases} .$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono $a = 0, b = 0$, da cui $z = 0$, e $a = 3, b = 0$, da cui $z = 3$.

Esercizio 4.

Tenendo conto della simmetria circolare del dominio e della funzione integranda, si può effettuare un cambiamento in coordinate polari piane. In tal caso, l'insieme di integrazione E si trasforma in

$$\tilde{E} = \{(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \ : \ 1 \leq \rho \leq 2 \ , \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

e l'integrale proposto diviene

$$\iint_E 2x \ \mathrm{e}^{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} \ dx \ dy = \iint_{\tilde{E}} 2\rho \cos\theta \ \mathrm{e}^{\frac{\rho \sin\theta}{\rho}} \rho \ d\rho \ d\theta = \left(\int_1^2 2\rho^2 \ d\rho \right) \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta \ \mathrm{e}^{\sin\theta} \ d\theta \right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} \rho^3 \Big|_1^2 \right) \left(\mathrm{e}^{\sin\theta} \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \right) = \frac{14}{3} (\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\sqrt{2}/2}) \ .$$

Domanda 1.

- Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, essa si dice continua nel punto $x_0 = 5$ se

$$\lim_{x \to 5} f(x) = f(5) \ .$$

  Equivalentemente, si dice che f è continua in $x_0 = 5$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$, tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $|x - 5| < \delta$, segue che $|f(x) - f(5)| < \varepsilon$.
- La funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x \leq 5; \\ 1 & \text{per } x > 5; \end{cases}$$

  ha un punto di discontinuità di salto in $x_0 = 5$, poiché

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 5^+} f(x) \ .$$

Domanda 2.

- Vedere libro di teoria.
- Per esempio consideriamo il problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} y'(x) = 2y(x) + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

  dove il secondo membro è dato da $f(x, y) = 2y + x$, che è una funzione definita su tutto $\mathbb{R}^2$ (cioè un aperto di tipo striscia verticale), di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ e lineare nella variabile y. Inoltre, poiché $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2$, cioè la derivata parziale rispetto ad y è globalmente limitata, vale il teorema di esistenza e unicità in grande. In questo caso, pertanto, esiste un'unica soluzione del problema $(*)$ di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

12 SETTEMBRE 2003 — SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1.

- La funzione proposta è simmetrica rispetto alla retta $x = 1$ e definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = \mathbb{R}$. Inoltre,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e non ci sono asinototi orizzontali o obliqui per } x \to \pm\infty \ ,$$

$$\text{infatti} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{(x-1)^2} = \pm\infty \ .$$

- La funzione è continua in quanto prodotto e composizione di funzioni continue, inoltre $f(x) \geq 0$ in $\mathbb{R}$.
  Monotonia:

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{(x-1)^2}(1 + 2(x-1)^2) > 0 & \text{per } x > 1 \ ; \\ -\mathrm{e}^{(x-1)^2}(1 + 2(x-1)^2) < 0 & \text{per } x < 1 \ ; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \pm 1,$$

pertanto, f cresce per $x > 1$, decresce per $x < 1$, $x = 1$ è punto angoloso di minimo assoluto e $f(1) = 0$.
Concavità:

$$f''(x) = \begin{cases} 2(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)^2}(3 + 2(x-1)^2) > 0 & \text{per } x > 1 \ ; \\ -2(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)^2}(3 + 2(x-1)^2) > 0 & \text{per } x < 1 \ ; \end{cases}$$

pertanto f è sempre convessa.
Osserviamo che, più semplicemente, è possibile studiare la funzione $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{(x-1)^2}$ nell'intervallo $[1, +\infty)$ e poi disegnare il grafico globale per simmetria rispetto all'asse $x = 1$. Il grafico è

Esercizio 2.

- Per $x = 2$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2^2 + 5n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4 + 5n^2}$$

che converge per il criterio del confronto asintotico, poiché $\frac{1}{4+5n^2} \sim \frac{1}{5n^2}$, che è il termine generale di una serie armonica generalizzata convergente, in quanto ha esponente maggiore di 1.

- Osserviamo che, per $x = 0$, la serie converge banalmente in quanto coincide con la serie nulla. Per $x > 0$ la serie è a termini positivi e si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 5n^x} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 5n^x} \ .$$

Poiché $\frac{1}{x^2+5n^x} \sim \frac{1}{5n^x}$, per $x > 1$ la serie proposta converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, mentre per $0 < x \leq 1$ essa diverge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente minore di 1.

Esercizio 3.

Ponendo $z = a + ib$ e sostituendo nell'equazione proposta, si ottiene $3a - 3ib - a - ib = 2(a^2 + b^2)$, ovvero $2a - 4ib = 2(a^2 + b^2)$. Uguagliando parte reale ed immaginaria di ambo i membri, si ricava

$$\begin{cases} 2a = 2(a^2 + b^2) \\ -4b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = a^2 \\ b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b = 0 \end{cases} .$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono $a = 0, b = 0$, da cui $z = 0$, e $a = 1, b = 0$, da cui $z = 1$.

Esercizio 4.

Tenendo conto della simmetria circolare del dominio e della funzione integranda, si può effettuare un cambiamento in coordinate polari piane. In tal caso, l'insieme di integrazione E si trasforma in

$$\tilde{E} = \{(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [-\pi, \pi) \ : \ 1 \le \rho \le 3 \ , -\pi/2 \le \theta \le -\pi/4\}$$

e l'integrale proposto diviene

$$\begin{aligned} \iint_E y \ \mathrm{e}^{\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \ dx \ dy &= \iint_{\tilde{E}} \rho \sin\theta \ \mathrm{e}^{\frac{3\rho\cos\theta}{\rho}} \rho \ d\rho \ d\theta = \left(\int_1^3 \rho^2 \ d\rho \right) \left(\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \sin\theta \ \mathrm{e}^{3\cos\theta} \ d\theta \right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\rho^3 \Big|_1^3 \right) \left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\cos\theta} \Big|_{-\pi/2}^{-\pi/4} \right) = \frac{26}{9}(1 - \mathrm{e}^{3\sqrt{2}/2}) \ . \end{aligned}$$

Domanda 1.

- Data $f : I\!\!R \to I\!\!R$, essa si dice continua nel punto $x_0 = 7$ se

$$\lim_{x \to 7} f(x) = f(7) \ .$$

  Equivalentemente, si dice che f è continua in $x_0 = 7$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$, tale che per ogni $x \in I\!\!R$ con $|x - 7| < \delta$, segue che $|f(x) - f(7)| < \varepsilon$.
- La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 7; \\ 0 & \text{per } x = 7 \ ; \\ 1 & \text{per } x > 7; \end{cases}$$

  ha un punto di discontinuità eliminabile in $x_0 = 7$, poiché

$$\lim_{x \to 7^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 7^+} f(x)$$

  ma $f(7) = 0 \neq 1$.

Domanda 2.

- Vedere libro di teoria.
- Per esempio consideriamo il problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} y'(x) = 2y(x) + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

  dove il secondo membro è dato da $f(x, y) = 2y + x$, che è una funzione definita su tutto $I\!\!R^2$ (cioè un aperto di tipo striscia verticale), di classe $\mathcal{C}^1(I\!\!R^2)$ e lineare nella variabile y. Inoltre, poiché $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2$, cioè la derivata parziale rispetto ad y è globalmente limitata, vale il teorema di esistenza e unicità in grande. In questo caso, pertanto, esiste un'unica soluzione del problema $(*)$ di classe $\mathcal{C}^1(I\!\!R)$.