SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Ponendo $R = 1/l$, in senso generalizzato, si ricava

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 4^n}{n^3 + 5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n}} = 4/5 \qquad \text{da cui} \qquad R = 5/4\,.$$

Poiché, per i risultati visti, la serie converge puntualmente in $(2 - 5/4, 2 + 5/4) = (3/4, 13/4)$ e converge totalmente in ogni sottointervallo chiuso ivi contenuto, si ottiene che nell'intervallo $[1, 3]$ si ha convergenza totale.

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. Essa ha come integrale singolare $y(x) = 0$, che non risolve il problema di Cauchy assegnato. Per $y \neq 0$, il suo integrale generale si ottiene come segue:

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int x\cos x\, dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{y} = x\sin x + \cos x + C$$

da cui

$$y(x) = -\frac{1}{x\sin x + \cos x + C}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ricava $C = -2$, quindi la soluzione cercata sarà

$$y(x) = -\frac{1}{x\sin x + \cos x - 2}\,.$$

Esercizio 3

1. Per $\alpha = -1$, l'integrale proposto diventa

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{(x+1)^{3/2}}\, dx$$

che va studiato esclusivamente in un intorno di $+\infty$. Osservando che per $x \to +\infty$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{3/2}}$, si ottiene che l'integrale improprio converge, grazie al criterio del confronto.

2. Per $\alpha = 0$, l'integrale proposto diventa

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x^{3/2}}\, dx$$

che va studiato sia in un intorno di $+\infty$ che in un intorno di $x = 0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine di e^y, con $y = -x$, si ottiene che, per $x \to 0^+$, $f(x) \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ e quindi l'integrale improprio converge in un intorno di $x = 0$, grazie al criterio del confronto asintotico. Poiché all'infinito il comportamento è analogo al caso precedente, si ricava che l'integrale proposto esiste finito.

3. Per $\alpha > 0$, l'integrale proposto va studiato sia in un intorno di $+\infty$ che in un intorno di $x = \alpha$. D'altra parte, per $x \to \alpha$, $f(x) \sim \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}{|x-\alpha|^{3/2}}$ e quindi, applicando il criterio del confronto asintotico, si ottiene che l'integrale improprio non converge in un intorno di $x = \alpha$.