SOLUZIONI COMPITO

Esercizio 1

Osserviamo innanzitutto che il limite proposto si può riscrivere nella forma

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n^4+1}{n^3+5}} = \lim_{n\to+\infty}\exp\left[\frac{n^4+1}{n^3+5}\log(1+\frac{2}{n})\right].$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine del $\log(1+x)$, con $x=2/n$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+1}{n^3+5}\log(1+\frac{2}{n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4}{n^3}\,\frac{2}{n} = 2\,.$$

Pertanto il limite richiesto vale e^2.

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. Essa ha come integrale singolare $y(x)=0$, che non risolve il problema di Cauchy assegnato. Per $y\neq 0$, il suo integrale generale si ottiene come segue:

$$\int\frac{1}{y^2}\,dy = \int x\cos x\,dx \qquad\Longrightarrow\qquad -\frac{1}{y} = x\sin x+\cos x+C$$

da cui

$$y(x) = -\frac{1}{x\sin x+\cos x+C}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0)=1$, si ricava $C=-2$, quindi la soluzione cercata sarà

$$y(x) = -\frac{1}{x\sin x+\cos x-2}\,.$$

Esercizio 3

Effettuando un cambiamento in coordinate polari, $x=r\cos\theta$ e $y=r\sin\theta$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2(\mathrm{e}^{x^2+y^2}-1)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \lim_{r\to0^+}\frac{r^2\cos^2\theta(\mathrm{e}^{r^2}-1)}{r^3} = \lim_{r\to0^+}\frac{\cos^2\theta(\mathrm{e}^{r^2}-1)}{r} = \lim_{r\to0^+}\frac{\cos^2\theta\cdot r^2}{r} = 0\,,$$

dove, nella penultima uguaglianza, si è usato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine di e^x, con $x=r^2$.

Esercizio 4

Poiché $f'(x) = -2\sin 2x+\sqrt{3}$, si ottiene facilmente che

$$\begin{array}{lll} f'(x)>0 & \text{se} & 0<x<\pi/6 \quad \text{oppure se} \quad \pi/3<x<\pi\,,\\ f'(x)<0 & \text{se} & \pi/6<x<\pi/3\,. \end{array}$$

Pertanto il punto di minimo assoluto va cercato tra i punti $x=0$ e $x=\pi/3$, mentre il punto di massimo assoluto va cercato tra i punti $x=\pi/6$ e $x=\pi$. Poiché

$$\begin{array}{lll} & f(0)=1 & f(\pi/3) = -\frac{1}{2}+\frac{\pi}{\sqrt{3}} \\ \text{e} & f(\pi/6)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi & f(\pi)=1+\sqrt{3}\pi \quad , \end{array}$$

si ottiene che il minimo assoluto di f in $[0,\pi]$ è raggiunto nel punto $x=0$ e vale 1, mentre il massimo assoluto di f in $[0,\pi]$ è raggiunto nel punto $x=\pi$ e vale $1+\sqrt{3}\pi$.

Esercizio 5

1. Per $\alpha = -1$, l'integrale proposto diventa

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{(x+1)^{3/2}}\, dx$$

che va studiato esclusivamente in un intorno di $+\infty$. Osservando che per $x \to +\infty$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{3/2}}$, si ottiene che l'integrale improprio converge, grazie al criterio del confronto.

2. Per $\alpha = 0$, l'integrale proposto diventa

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x^{3/2}}\, dx$$

che va studiato sia in un intorno di $+\infty$ che in un intorno di $x = 0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine di e^y, con $y = -x$, si ottiene che, per $x \to 0^+$, $f(x) \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ e quindi l'integrale improprio converge in un intorno di $x = 0$, grazie al criterio del confronto asintotico. Poiché all'infinito il comportamento è analogo al caso precedente, si ricava che l'integrale proposto esiste finito.

3. Per $\alpha > 0$, l'integrale proposto va studiato sia in un intorno di $+\infty$ che in un intorno di $x = \alpha$. D'altra parte, per $x \to \alpha$, $f(x) \sim \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}{|x-\alpha|^{3/2}}$ e quindi, applicando il criterio del confronto asintotico, si ottiene che l'integrale improprio non converge in un intorno di $x = \alpha$.

Esercizio 6

Poiché, per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, si ha che $F'(x) = x^3 f(x)$, imponendo che

$$f(x) < 0 \quad \text{per} \quad x > 0 \qquad \text{e} \qquad f(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < 0\,,$$

si ottiene che $x^3 f(x) < 0$, per $x \neq 0$. Pertanto $F'(x) < 0$, per $x \neq 0$, e quindi la funzione integrale è strettamente decrescente su tutto $\mathbb{R}$.