

1. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \log x, & x > 0; \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

2. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 - 2z + 4 = 0$ e scriverle in forma trigonometrica.

3. Studiare la natura dei punti critici della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} - \frac{x^2}{2} - xy.$$

4. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^3) \sin x}{1 - \cos x^2}.$$

5. Dopo averne stabilito l'esistenza dal punto di vista teorico, determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = x \sin x + \cos x - \frac{x^2}{4}$$

nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

6. Stabilire, giustificando la risposta, quale delle seguenti funzioni ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$:

$$A) f(x) = \begin{cases} \sin(|x| - 1) & \text{se } x \neq 1 \\ |x| - 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad B) f(x) = \begin{cases} \sin|x - 1| & \text{se } x \leq 1 \\ |x - 1| & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$C) f(x) = \begin{cases} \sin(|x| - 1) & \text{se } x < 1 \\ \sin|x| & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad D) f(x) = \begin{cases} \sin|x| & \text{se } x \neq 1 \\ |x - 1| & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Tempo:
3 ore

