SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integranda è una funzione continua e positiva in $(0, +\infty)$, e quindi integrabile in senso proprio in ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[\delta, M]$, con $0 < \delta < M < +\infty$. Pertanto, per stabilire se l'integrale proposto esiste finito, esso va studiato in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito ed in un intorno destro $U(0^+)$ del punto $x = 0$.

In $U(+\infty)$, tenendo conto che $\tanh x \to 1$ per $x \to +\infty$, si ha

$$0 \le f(x) \sim \frac{x^{\alpha-2}}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{7/2-\alpha}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio solo per } 7/2 - \alpha > 1;$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito se $\alpha < 5/2$, mentre diverge per $\alpha \ge 5/2$.

In $U(0^+)$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \tanh x$, si ha

$$0 \le f(x) \sim \frac{x \cdot x^{\alpha-2}}{1} = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio solo per } 1 - \alpha < 1;$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito se $\alpha > 0$, mentre diverge per $\alpha \le 0$.
In conclusione, l'integrale proposto esiste finito solo per $0 < \alpha < 5/2$.

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che la funzione proposta, in quanto somma e rapporto di potenze con denominatore non nullo in D, è continua sull'insieme chiuso e limitato $\Gamma \subset D$. Pertanto, grazie al Teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti.
Poiché possiamo parametrizzare l'insieme Γ ponendo $x = 3y^2$, sostituendo nell'espressione di f, otteniamo

$$f\left(3y^2, y\right) = \frac{9y^4}{3y^2} + 6y^2 - \frac{3y^2}{y} + 2 = 9y^2 - 3y + 2 =: g(y)\,.$$

La funzione g va ora studiata nell'intervallo $[1/9, 1]$; derivandola si ricava $g'(y) = 18y - 3$, che è negativa per $y \in [1/9, 1/6)$ e positiva per $y \in (1/6, 1]$. Quindi il punto $y = 1/6$ è punto di minimo assoluto, mentre i punti $y = 1/9$ e $y = 1$ sono candidati ad essere punti di massimo assoluto. Confrontando i rispettivi valori di g in tali punti, si ottiene che $y = 1$ è punto di massimo assoluto. Pertanto, per la funzione f, si ottiene che $(x, y) = (1/12, 1/6)$ è punto di minimo assoluto in Γ e $(x, y) = (3, 1)$ è punto di massimo assoluto in Γ.

Esercizio 3

Innanzitutto osserviamo che la funzione proposta, in quanto somma di potenze positive, è continua sull'insieme chiuso e limitato E. Pertanto, grazie al Teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Poiché l'insieme E può essere scritto sotto la forma di vincolo $E = \{g(x, y) = x^2 + 7y^2 - 11 = 0\}$, introduciamo la Lagrangiana $L(x, y, \lambda)$ associata al problema proposto e data da

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + 22x + \lambda(x^2 + 7y^2 - 11)\,.$$

Derivando, otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 4x + 22 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -4y + 14\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 7y^2 - 11 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 4x + 22 + 2\lambda x = 0 \\ y(-2 + 7\lambda) = 0 \\ x^2 + 7y^2 - 11 = 0 \end{cases}$$

che fornisce o $\lambda = 2/7$ oppure $y = 0$. Nel primo caso, sostituendo $\lambda = 2/7$ nella prima equazione, si ottiene $x = -\frac{77}{16}$; sostituendo, a sua volta, questo valore nella terza equazione, si ricava un'equazione impossibile.

Nel secondo caso, sostituendo $y = 0$ nella terza equazione, si ricava $x = \pm\sqrt{11}$. Quindi si trovano due punti stazionari, che sono $(\pm\sqrt{11}, 0)$. Confrontando i valori della funzione in tali punti, si ottiene che $f(\sqrt{11}, 0) = 22(1 + \sqrt{11})$ mentre $f(-\sqrt{11}, 0) = 22(1 - \sqrt{11})$, quindi $(x, y) = (-\sqrt{11}, 0)$ è punto di minimo assoluto in E e $(x, y) = (\sqrt{11}, 0)$ è punto di massimo assoluto in E.

Esercizio 4

Osserviamo che le soluzioni dell'equazione proposta sono date dall'insieme delle soluzioni delle due equazioni

$$z^4 + 256 = 0 \qquad \text{e} \qquad |z|^2 + i\mathrm{Re}(z) - 1 = 0\,.$$

La prima equazione consiste nel determinare le quattro radici quarte di -256, ovvero

$$z = \sqrt[4]{-256} = \sqrt[4]{256\ \mathrm{e}^{i\pi}} = \begin{cases} 4\,[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)] = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} \\ 4\,[\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)] = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} \\ 4\,[\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)] = -2\sqrt{2} - i2\sqrt{2} \\ 4\,[\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)] = 2\sqrt{2} - i2\sqrt{2} \end{cases}$$

La seconda consiste nel determinare le soluzioni di $a^2 + b^2 + ia - 1 = 0$, ove si è posto $z = a + ib$; ovvero

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 1 = 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z = \pm i\,.$$