SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integranda è una funzione continua e positiva in $(0, +\infty)$, e quindi integrabile in senso proprio in ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[\delta, M]$, con $0 < \delta < M < +\infty$. Pertanto, per stabilire se l'integrale proposto esiste finito, esso va studiato in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito ed in un intorno destro $U(0^+)$ del punto $x = 0$.

In $U(+\infty)$, tenendo conto che $\tanh x \to 1$ per $x \to +\infty$, si ha

$$0 \le f(x) \sim \frac{x^{\alpha-2}}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{7/2-\alpha}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio solo per } 7/2 - \alpha > 1;$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito se $\alpha < 5/2$, mentre diverge per $\alpha \ge 5/2$.

In $U(0^+)$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \tanh x$, si ha

$$0 \le f(x) \sim \frac{x \cdot x^{\alpha-2}}{1} = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio solo per } 1 - \alpha < 1;$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito se $\alpha > 0$, mentre diverge per $\alpha \le 0$.
In conclusione, l'integrale proposto esiste finito solo per $0 < \alpha < 5/2$.

Esercizio 2

Utilizzando la formula risolutiova per l'equazioni di secondo grado, valida anche in campo complesso, otteniamo:

$$z = 1 + \sqrt{1-4} = 1 + \sqrt{-3} = 1 \pm i\sqrt{3}\,.$$

Per rappresentare le soluzioni trovate in forma trigonometrica, dobbiamo determinarne modulo e argomento, utilizzando le relazioni:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2\,, \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{1}{2} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \theta = \pm\frac{\pi}{3}\,.$$

Pertanto,

$$z_1 = 2[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] \qquad z_2 = 2[\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)]\,.$$

Esercizio 3

Osserviamo che si tratta di una serie a termini non negativi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per il $\sin t$, con $t = 1/n^4$, e quello al primo ordine per il $\log(1+t)$, con $t = 1/n^3$, otteniamo

$$\sin(1/n^4) = 1/n^4 - \frac{1}{3!}(1/n^{12}) + o(1/n^{12})\,, \qquad \log(1 + 1/n^3) = 1/n^3 + o(1/n^3)\,,$$

e quindi per il termine generale a_n si ha

$$a_n = \frac{(1/n^4) - \sin(1/n^4)}{\log(1 + 1/n^3)} \sim \frac{1/n^4 - 1/n^4 + \frac{1}{6}(1/n^{12})}{1/n^3} = \frac{1}{6n^9}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, otteniamo che la serie proposta converge.

Esercizio 4

Poiché la funzione f è continua (in quanto somma e prodotto di funzioni continue) sull'intervallo chiuso e limitato $[-\pi, \pi]$, per il Teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Poiché f è anche derivabile, studiando il segno di $f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x - x/2 = x(\cos x - 1/2)$, si ottiene

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{per } [-\pi, -\pi/3) \cup (0, \pi/3); \\ f'(x) < 0 & \text{per } (-\pi/3, 0) \cup (\pi/3, \pi]; \end{cases}$$

quindi, i punti $x = 0, \pm\pi$ sono candidati ad essere punti di minimo assoluto, mentre i punti $x = \pm\pi/3$ sono candidati ad essere punti di massimo assoluto. Confrontando fra loro i rispettivi valori, si ricava

$$\begin{aligned} &f(\pi) = f(-\pi) = -1 - \pi^2/4 \\ &f(0) = 1 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad f(-\pi/3) = f(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{36}\,.$$

Pertanto, $x = \pm\pi$ sono punti di minimo assoluto, mentre $x = \pm\pi/3$ sono punti di massimo assoluto.