SOLUZIONI COMPITO del 12/09/2012
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Imponendo la condizione di non annullamento del denominatore e ricordando che il logaritmo è definito solo per argomenti positivi, otteniamo che il campo di esistenza D è dato da $D = (0,1) \cup (1,+\infty)$. Calcoliamo, quindi, i limiti alla frontiera:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2 + 15 \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty \qquad \text{pertanto } x = 0 \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{5}{x-1} = \pm\infty \qquad \text{pertanto } x = 1 \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x^2}{x} + 15\log x\right) = \lim_{x\to +\infty} 3x = +\infty \qquad \text{pertanto non c'è asintoto orizzontale a } +\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} + 15\frac{\log x}{x}\right) = 3 \qquad \text{pertanto } m = 3;$$

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{3x^2 + 2 - 3x^2 + 3x}{x-1} + 15\log x\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{2+3x}{x-1} + 15\log x\right]$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{3x}{x} + 15\log x\right] = +\infty \qquad \text{pertanto } q \text{ non esiste.}$$

Quindi, la funzione proposta ammette due asintoti verticali in $x = 0$ e in $x = 1$, ma non ha né asintoti orizzontali, né asintoti obliqui.

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è non negativa e che, nell'intervallo considerato, presenta una singolarità solo per $x = 1$. Inoltre, per $x \to 1^-$, abbiamo

$$f(x) \sim \frac{[(1-x)^{5/4}]^{8/15}}{-\log[1 + (x-1)] + (1-x)^\alpha} \sim \begin{cases} \frac{(1-x)^{2/3}}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{1/3}} & \text{se } \alpha > 1; \\ \frac{(1-x)^{2/3}}{2(1-x)} = \frac{1}{2(1-x)^{1/3}} & \text{se } \alpha = 1; \\ \frac{(1-x)^{2/3}}{(1-x)^\alpha} = \frac{1}{(1-x)^{\alpha-2/3}} & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, la funzione proposta è impropriamente integrabile per $\alpha \geq 1$, mentre per $\alpha < 1$ essa sarà impropriamente integrabile sotto la condizione $\alpha - 2/3 < 1$, che fornisce $\alpha < 5/3$. Concludendo, la funzione risulta impropriamente integrabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Dividendo ambo i membri per il fattore non nullo $\sqrt{1+x^4}$, l'equazione differenziale proposta si può riscrivere nella forma

$$y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = \frac{3(\arctan x^2)^2}{1+x^4}\,,$$

ovvero essa risulta essere un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine. Utilizzando la formula risolutiva e tenendo conto che

$$-\int a(x)\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\log x + c = \log\left(\frac{1}{x}\right) + c\,;$$

$$\int f(x)\,\mathrm{e}^{\int a(x)\,dx}\,dx = \int \frac{3\left(\arctan x^2\right)^2}{1+x^4}\,\mathrm{e}^{\log x}\,dx = \int \frac{3x\left(\arctan x^2\right)^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\left(\arctan x^2\right)^3}{2} + c\,;$$

si ricava l'integrale generale, dato da

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[C + \frac{\left(\arctan x^2\right)^3}{2}\right].$$

Imponendo, infine, la condizione richiesta, ricaviamo

$$\lim_{x\to+\infty} xy(x) = \lim_{x\to+\infty} x\,\frac{1}{x}\left[C + \frac{\left(\arctan x^2\right)^3}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[C + \frac{\left(\arctan x^2\right)^3}{2}\right] = C + \frac{\pi^3}{16} = \frac{\pi^3}{8}$$

$$\Longrightarrow \qquad C = \frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{16} = \frac{\pi^3}{16}.$$

Quindi, esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale che soddisfi la condizione richiesta ed è data da

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{\pi^3}{16} + \frac{\left(\arctan x^2\right)^3}{2}\right].$$

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$, con $x = 1/2n$, e quello al primo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$, con $x = 1/n$, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{1/2n}\log n - \log n - \log(n^{1/2n})}{\log\left(n^{2[\sin(1/n)]^{3/5}}\right)} &\sim \frac{(1 + 1/2n + 1/8n^2)\log n - \log n - (1/2n)\log n}{2[\sin(1/n)]^{3/5}\log n} \\ &\sim \frac{\frac{1}{8n^2}\log n}{\frac{2}{n^{3/5}}\log n} = \frac{1}{16n^{7/5}} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty.\end{aligned}$$

Esercizio 5

Osserviamo, innanzitutto, che se f è costante su $[a,b]$, la derivata è nulla su tutto l'intervallo e qualunque punto $\xi \in (a,b)$ risolve il problema. Se, invece, f non è costante su $[a,b]$, essendo ivi continua, per il Teorema di Weierstrass ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in $[a,b]$. Poiché f assume il medesimo valore agli estremi, almeno uno dei due estremanti assoluti, che denotiamo con ξ, deve necessariamente appartenere all'intervallo aperto (a,b). Poiché in tal caso vale il Teorema di Fermat, si ha che $f'(\xi) = 0$ e ciò conclude la dimostrazione.

TEMA B

Esercizio 1

Imponendo la condizione di non annullamento del denominatore, otteniamo che il campo di esistenza D è dato da $D = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$. Calcoliamo, quindi, i limiti alla frontiera:

$$\lim_{x\to 5^\pm} f(x) = \lim_{x\to 5^\pm}\left(\frac{26}{2(x-5)} + 6\sin 5\right) = \pm\infty \qquad \text{pertanto } x = 5 \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2x} + 6\sin x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x/2 = \pm\infty \qquad \text{pertanto non c'è asintoto orizzontale a } \pm\infty;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2x^2} + 6\frac{\sin x}{x}\right) = 1/2 \qquad \text{pertanto } m = 1/2;$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - x/2] &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+1-x^2+5x}{2x-10} + 6\sin x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1+5x}{2x-10} + 6\sin x\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{5x}{2x} + 6\sin x\right] = \nexists \qquad \text{pertanto } q \text{ non esiste.}\end{aligned}$$

Quindi, la funzione proposta ammette un asintoto verticale in $x = 5$ da destra e da sinistra, ma non ha né asintoti orizzontali, né asintoti obliqui.

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è non negativa e che, nell'intervallo considerato, presenta una singolarità solo per $x = 2$. Inoltre, per $x \to 2^-$, abbiamo

$$f(x) \sim \frac{\log[1+(2-x)]}{(2-x)^{2\alpha-1} + [(2-x)^{7/2}]^{10/21}} \sim \begin{cases} \frac{2-x}{(2-x)^{5/3}} = \frac{1}{(2-x)^{2/3}} & \text{se } \alpha > 4/3;\\ \frac{2-x}{2(2-x)^{5/3}} = \frac{1}{2(2-x)^{2/3}} & \text{se } \alpha = 4/3;\\ \frac{2-x}{(2-x)^{2\alpha-1}} = \frac{1}{(2-x)^{2\alpha-2}} & \text{se } \alpha < 4/3.\end{cases}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, la funzione proposta è impropriamente integrabile per $\alpha \geq 4/3$, mentre per $\alpha < 4/3$ essa sarà impropriamente integrabile sotto la condizione $2\alpha - 2 < 1$, che fornisce $\alpha < 3/2$. Concludendo, poiché $3/2 > 4/3$, la funzione risulta impropriamente integrabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Dividendo ambo i membri per il fattore non nullo $\sqrt{1+x^2}$, l'equazione differenziale proposta si può riscrivere nella forma

$$y'(x) - \frac{1}{x}\,y(x) = \frac{8x(\arctan x)^3}{1+x^2}\,,$$

ovvero essa risulta essere un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine. Utilizzando la formula risolutiva e tenendo conto che

$$-\int a(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log x + c = -\log\left(\frac{1}{x}\right) + c\,;$$

$$\int f(x)\,e^{\int a(x)\,dx}\,dx = \int \frac{8x\,(\arctan x)^3}{1+x^2}\,e^{\log(1/x)}\,dx = \int \frac{8x\,(\arctan x)^3}{(1+x^2)x}\,dx = 2\,(\arctan x)^4 + c\,;$$

si ricava l'integrale generale, dato da

$$y(x) = x\left[C + 2(\arctan x)^4\right]\,.$$

Imponendo, infine, la condizione richiesta, ricaviamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[C+2(\arctan x)^4\right]}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[C+2(\arctan x)^4\right] = C + \frac{2\pi^4}{16} = \frac{\pi^4}{4}\\ \Longrightarrow \qquad C &= \frac{\pi^4}{4} - \frac{\pi^4}{8} = \frac{\pi^4}{8}\,.\end{aligned}$$

Quindi, esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale che soddisfi la condizione richiesta ed è data da

$$y(x) = x \left[\frac{\pi^4}{8} + 2(\arctan x)^4 \right].$$

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $x \mapsto \cos x$, con $x = 1/n$, e quello al primo ordine per la funzione $x \mapsto \tan x$, con $x = 1/n$, otteniamo

$$\frac{\log\left(n^{\frac{1}{4}[\tan(1/n)]^{2/3}}\right)}{\cos(1/n)\log n - \log n + \log(n^{1/2n^2})} \sim \frac{\frac{1}{4}[\tan(1/n)]^{2/3}\log n}{(1 - 1/2n^2 + 1/4!n^4)\log n - \log n + (1/2n^2)\log n}$$

$$\sim \frac{\frac{1}{4n^{2/3}}\log n}{\frac{1}{4!n^4}\log n} = 6n^{10/3} \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Esercizio 5

Osserviamo, innanzitutto, che se f è costante su $[a, b]$, la derivata è nulla su tutto l'intervallo e qualunque punto $\xi \in (a, b)$ risolve il problema. Se, invece, f non è costante su $[a, b]$, essendo ivi continua, per il Teorema di Weierstrass ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in $[a, b]$. Poiché f assume il medesimo valore agli estremi, almeno uno dei due estremanti assoluti, che denotiamo con ξ, deve necessariamente appartenere all'intervallo aperto (a, b). Poiché in tal caso vale il Teorema di Fermat, si ha che $f'(\xi) = 0$ e ciò conclude la dimostrazione.