**SOLUZIONI COMPITO del 12/09/2012**
**ANALISI MATEMATICA I - 5 CFU**
**ENERGETICA**

**TEMA A**

**Esercizio 1**
Tenendo conto che $-\alpha^2 - 2 < 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (cioè $n^{-\alpha^2-2} \to 0$ per $n \to +\infty$) e utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = n^{-\alpha^2-2}$, otteniamo

$$a_n := \left[\mathrm{e}^{(n^{-\alpha^2-2})} - 1\right] n^{1-2\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha^2+2}}\, n^{1-2\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha^2+2\alpha+1}} \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

La serie proposta, pertanto, converge per confronto con la serie armonica generalizzata per $(\alpha+1)^2 > 1$, ovvero per $\alpha < -2$ e $\alpha > 0$.

**Esercizio 2**
Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate in $(0,0)$ ricaviamo

$$\iint_E \frac{x^3 \mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{\sqrt{1+x^2+y^2}(x^2+y^2)^{3/2}}\, dy\, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left( \int_1^2 r^3 \cos^3\theta \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{1+r^2}}}{\sqrt{1+r^2}\, r^3}\, r\, dr \right) d\theta$$
$$= \left( \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta \right) \left( \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{1+r^2}}}{\sqrt{1+r^2}}\, r\, dr \right) = \left( \int_{\pi/4}^{\pi/2} [1-\sin^2\theta] \cos\theta\, d\theta \right) \left( \mathrm{e}^{\sqrt{1+r^2}} \Big|_1^2 \right)$$
$$= \left( \sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \left( \mathrm{e}^{\sqrt{5}} - \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \right) = \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{8}}{24} \right) \left( \mathrm{e}^{\sqrt{5}} - \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12} \right) \left( \mathrm{e}^{\sqrt{5}} - \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \right).$$

**Esercizio 3**
Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è non negativa e che, nell'intervallo considerato, presenta una singolarità solo per $x = 1$. Inoltre, per $x \to 1^-$, abbiamo

$$f(x) \sim \frac{[(1-x)^{5/4}]^{8/15}}{-\log[1+(x-1)] + (1-x)^\alpha} \sim \begin{cases} \frac{(1-x)^{2/3}}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{1/3}} & \text{se } \alpha > 1; \\ \frac{(1-x)^{2/3}}{2(1-x)} = \frac{1}{2(1-x)^{1/3}} & \text{se } \alpha = 1; \\ \frac{(1-x)^{2/3}}{(1-x)^\alpha} = \frac{1}{(1-x)^{\alpha-2/3}} & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, la funzione proposta è impropriamente integrabile per ogni $\alpha \geq 1$, mentre per $\alpha < 1$ essa sarà impropriamente integrabile sotto la condizione $\alpha - 2/3 < 1$, che fornisce $\alpha < 5/3$. Concludendo, la funzione risulta impropriamente integrabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 4**
Dividendo ambo i membri per il fattore non nullo $\sqrt{1+x^4}$, l'equazione differenziale proposta si può riscrivere nella forma

$$y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = \frac{3\left(\arctan x^2\right)^2}{1+x^4},$$

ovvero risulta essere un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine. Utilizzando la formula risolutiva e tenendo conto che

$$-\int a(x)\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx = -\log x + c = \log\left(\frac{1}{x}\right) + c;$$
$$\int f(x)\, \mathrm{e}^{\int a(x)\, dx}\, dx = \int \frac{3\left(\arctan x^2\right)^2}{1+x^4}\, \mathrm{e}^{\log x}\, dx = \int \frac{3x\left(\arctan x^2\right)^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\left(\arctan x^2\right)^3}{2} + c;$$

si ricava l'integrale generale, dato da

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[C + \frac{\left(\arctan x^2\right)^3}{2}\right].$$

Imponendo, infine, la condizione richiesta, ricaviamo

$$\lim_{x\to+\infty} xy(x) = \lim_{x\to+\infty} x\,\frac{1}{x}\left[C + \frac{\left(\arctan x^2\right)^3}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[C + \frac{\left(\arctan x^2\right)^3}{2}\right] = C + \frac{\pi^3}{16} = \frac{\pi^3}{8}$$
$$\Longrightarrow \qquad C = \frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{16} = \frac{\pi^3}{16}.$$

Quindi, esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale che soddisfi la condizione richiesta ed è data da

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{\pi^3}{16} + \frac{\left(\arctan x^2\right)^3}{2}\right].$$

**Esercizio 5**

*a)* L'affermazione è falsa, poiché non viene richiesto che $(0,0)$ sia un punto stazionario. Ad esempio, $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 5x$ ha $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, che è definita negativa, ma $(0,0)$ non è un punto di massimo relativo, poiché $\nabla f(0,0) = (5,0)$, cioè $(0,0)$ non è punto stazionario. In particolare, $f(0,0) = 0 < f(1,0) = 4$.

*b)* L'affermazione è falsa, poiché non viene richiesto che $(1,1)$ sia un punto stazionario. Ad esempio, $f(x,y) = -(x-1)^2 + (y-1)^2 + 5x$ ha $Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, che è indefinita, ma $(1,1)$ non è un punto di sella, poiché $\nabla f(1,1) = (5,0)$, cioè $(1,1)$ non è punto stazionario.

*c)* L'affermazione è vera poiché, dalle ipotesi, risulta che $(0,0)$ è un punto stazionario e la sua matrice Hessiana è anche definita positiva, quindi queste condizioni sono sufficienti a garantire che $(0,0)$ sia punto di minimo relativo per $f$.

*d)* L'affermazione è falsa, poiché la condizione necessaria affinché $(0,0)$ sia un punto di minimo è che $Hf(0,0)$ sia solo semidefinita positiva. Ad esempio, $f(x,y) = x^4 + y^2$ ha $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, che è solo semidefinita positiva; ciononostante, $(0,0)$ è un punto di minimo (assoluto) per $f$, in quanto $f(0,0) = 0 \le x^4 + y^2 = f(x,y)$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.