

1. Determinare, al variare del parametro reale α , il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{[\sin(e^{-n})]^\alpha}{\log(n^2) + 2 \log n}.$$

2. Stabilire se l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin(e^x - 1)}{3x^{7/6} + 2x^4} dx$$

esiste finito.

3. Determinare, al variare del parametro reale α , l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$3y''(x) - 9y(x) = 2e^{\alpha x} + 5.$$

4. Calcolare

$$\iint_E x \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi \leq x^2 + y^2 \leq 3\pi/2, x \geq 0\}$.

5. Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni assegnate tali che

$$a_n \rightarrow +\infty, \quad \{b_n\} \text{ è limitata,} \quad \{c_n\} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Stabilire, giustificando la risposta, se l'affermazione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n c_n}{a_n} \text{ converge}$$

è corretta. Fornire un controesempio in caso contrario.

