SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Ponendo $R = 1/l$ in senso generalizzato, si ricava

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+n}{4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n}\cdot\sqrt[n]{1+\frac{n}{2^n}}}{\sqrt[n]{4}} = 2 \qquad \text{da cui} \qquad R = 1/2\,.$$

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $3\lambda^2 - 1 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = \pm 1/\sqrt{3}$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{x/\sqrt{3}} + C_2 \mathrm{e}^{-x/\sqrt{3}}\,.$$

Dal metodo di somiglianza si ottiene, invece, che una soluzione particolare dell'equazione completa è $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, ovvero, dopo aver sostituito nell'equazione, si ricava $6a - ax^2 - bx - c = x^2$, da cui $a = -1$, $b = 0$ e $c = -6$. Pertanto la soluzione particolare è $y_p(x) = -x^2 - 6$ e la soluzione completa dell'equazione differenziale è

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x/\sqrt{3}} + C_2 \mathrm{e}^{-x/\sqrt{3}} - x^2 - 6\,.$$

Imponendo ora le condizioni iniziali si ottiene

$$y(x) = \frac{7}{2}\mathrm{e}^{x/\sqrt{3}} + \frac{7}{2}\mathrm{e}^{-x/\sqrt{3}} - x^2 - 6 = 7\cosh(x/\sqrt{3}) - x^2 - 6\,.$$

2. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $\cosh t$ con $t = x/\sqrt{3}$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7\cosh(x/\sqrt{3}) - x^2 - 7}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7(1 + x^2/6) - x^2 - 7}{x^2} = 1/6\,.$$

Esercizio 3

1. $C.E. = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.
2. I punti stazionari per f in $\mathbb{R}^2$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy - 4\log y = 0\,, \\ f_y(x,y) = x^2 - \dfrac{4x}{y} = 0\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{matrix} (x,y) = (0,1)\,, \\ (x,y) = (4/\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2)\,. \end{matrix}$$

Calcolando la matrice Hessiana in tali punti, si ricava

$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}\,,$$

$$Hf(4/\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^2 & 4/\mathrm{e}^2 \\ 4/\mathrm{e}^2 & 16/\mathrm{e}^6 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di minimo}\,.$$

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^{2x}$, da cui $\mathrm{e}^{2x}\, dx = \frac{1}{2} dt$, si ottiene

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x+2}}{3\mathrm{e}^{2x} - 4}\, dx = \mathrm{e}^2 \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{3\mathrm{e}^{2x} - 4}\, dx = \frac{\mathrm{e}^2}{2} \int \frac{1}{3t - 4}\, dt \Big|_{t=\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\mathrm{e}^2}{6} \log|3\mathrm{e}^{2x} - 4| + C\,.$$

Imponendo ora la condizione richiesta, si ricava

$$\frac{\mathrm{e}^2}{6}\log 1 + C = 0 \qquad \text{da cui} \qquad C = 0\,.$$

Pertanto la primitiva cercata è $\phi(x) = \frac{\mathrm{e}^2}{6}\log|3\mathrm{e}^{2x} - 4|$.