## SOLUZIONI COMPITO A

**Esercizio 1**

1. Moltiplicando numeratore e denominatore per $1-\sqrt{3}i$ si ottiene $z = \frac{2\sqrt{3}-2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-i\pi/6}$.
2. Tenendo conto del risultato precedente si ricava $z^5 = \mathrm{e}^{-5i\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$.

**Esercizio 2**

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $3\lambda^2 - 1 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = \pm 1/\sqrt{3}$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{x/\sqrt{3}} + C_2 \mathrm{e}^{-x/\sqrt{3}}\,.$$

Dal metodo di somiglianza si ottiene, invece, che una soluzione particolare dell'equazione completa è $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, ovvero, dopo aver sostituito nell'equazione, si ricava $6a - ax^2 - bx - c = x^2$, da cui $a = -1$, $b = 0$ e $c = -6$. Pertanto la soluzione particolare è $y_p(x) = -x^2 - 6$ e la soluzione completa dell'equazione differenziale è

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x/\sqrt{3}} + C_2 \mathrm{e}^{-x/\sqrt{3}} - x^2 - 6\,.$$

Imponendo ora le condizioni iniziali si ottiene

$$y(x) = \frac{7}{2}\mathrm{e}^{x/\sqrt{3}} + \frac{7}{2}\mathrm{e}^{-x/\sqrt{3}} - x^2 - 6 = 7\cosh(x/\sqrt{3}) - x^2 - 6\,.$$

2. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $\cosh t$ con $t = x/\sqrt{3}$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7\cosh(x/\sqrt{3}) - x^2 - 7}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7(1+x^2/6) - x^2 - 7}{x^2} = 1/6\,.$$

**Esercizio 3**

1. $C.E. = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.
2. I punti stazionari per $f$ in $\mathbb{R}^2$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy - 4\log y = 0\,, \\ f_y(x,y) = x^2 - \dfrac{4x}{y} = 0\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{array}{l} (x,y) = (0,1)\,, \\ (x,y) = (4/\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2)\,. \end{array}$$

Calcolando la matrice Hessiana in tali punti, si ricava

$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}\,,$$
$$Hf(4/\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^2 & 4/\mathrm{e}^2 \\ 4/\mathrm{e}^2 & 16/\mathrm{e}^6 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di minimo}\,.$$

**Esercizio 4**

La funzione proposta è continua e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, in quanto somma, composizione e rapporto di funzioni continue e derivabili. Resta da studiare solo il suo comportamento in $x = 0$.

1. Ovviamente per $x \to 0^+$ si ottiene $f(x) \to 0 = f(0)$. D'altra parte, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $\cos t$, con $t = x$ o $t = 3x$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - \cos(3x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - x^2/2 - 1 + 9x^2/2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x^2}{x} = 0\,.$$

Quindi $f$ è continua in $x = 0$.

2. Calcolando la derivata di $f$ per $x \neq 0$, si ricava

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x > 0, \\ \dfrac{[-\sin x + 3\sin(3x)]x - [\cos x - \cos(3x)]}{x^2} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} (2x+1) = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{[-\sin x + 3\sin(3x)]x - [\cos x - \cos(3x)]}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2 + 9x^2 - 1 + x^2/2 + 1 - 9x^2/2}{x^2} = 4\,, \end{aligned}$$

dove si è usato anche lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $\sin t$, con $t = x$ e $t = 3x$. Pertanto, la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove presenta un punto angoloso. Il medesimo risultato si poteva ottenere anche calcolando direttamente il limite del rapporto incrementale nel punto $x = 0$.

**Esercizio 5**

Effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^{2x}$, da cui $\mathrm{e}^{2x}\ dx = \frac{1}{2}dt$, si ottiene

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x+2}}{3\mathrm{e}^{2x} - 4}\ dx = \mathrm{e}^2 \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{3\mathrm{e}^{2x} - 4}\ dx = \frac{\mathrm{e}^2}{2} \int \frac{1}{3t - 4}\ dt\Big|_{t=\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\mathrm{e}^2}{6} \log|3\mathrm{e}^{2x} - 4| + C\,.$$

Imponendo ora la condizione richiesta, si ricava

$$\frac{\mathrm{e}^2}{6}\log 1 + C = 0 \qquad \text{da cui} \qquad C = 0\,.$$

Pertanto la primitiva cercata è $\phi(x) = \frac{\mathrm{e}^2}{6} \log|3\mathrm{e}^{2x} - 4|$.

**Esercizio 6**

Ponendo $f(x) = \sin x$, si ottiene che $f$ è definita e limitata su tutto $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to +\infty} \sin x = \nexists\,.$$

## SOLUZIONI COMPITO B

**Esercizio 1**

1. Moltiplicando numeratore e denominatore per $1-\sqrt{3}i$ si ottiene $z=-\frac{4i}{4}=-i=\mathrm{e}^{-i\pi/2}$.
2. Tenendo conto del risultato precedente si ricava $z^4=\mathrm{e}^{-2i\pi}=1$.

**Esercizio 2**

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2-4=0$, le cui soluzioni sono $\lambda=\pm 2$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x)=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Dal metodo di somiglianza si ottiene, invece, che una soluzione particolare dell'equazione completa è $y_p(x)=ax^2+bx+c$, ovvero, dopo aver sostituito nell'equazione, si ricava $2a-4ax^2-4bx-4c=4x^2$, da cui $a=-1$, $b=0$ e $c=-1/2$. Pertanto la soluzione particolare è $y_p(x)=-x^2-6$ e la soluzione completa dell'equazione differenziale è

$$y(x)=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}-x^2-1/2\,.$$

Imponendo ora le condizioni iniziali si ottiene

$$y(x)=\frac{3}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2x}-x^2-1/2=\frac{3}{2}\cosh(2x)-x^2-1/2\,.$$

2. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $\cosh t$ con $t=2x$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}\cosh(2x)-x^2-3/2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}(1+4x^2/2)-x^2-3/2}{x^2}=2\,.$$

**Esercizio 3**

1. $C.E.=(0,+\infty)\times\mathbb{R}$.
2. I punti stazionari per $f$ in $\mathbb{R}^2$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)=y^2+\dfrac{3y}{x}=0\,,\\ f_y(x,y)=2xy+3\log x=0\,,\end{cases}\qquad \text{da cui}\qquad \begin{array}{l}(x,y)=(1,0)\,,\\ (x,y)=(\mathrm{e}^2,-3/\mathrm{e}^2)\,.\end{array}$$

Calcolando la matrice Hessiana in tali punti, si ricava

$$Hf(1,0)=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\qquad \text{punto di sella}\,,$$
$$Hf(\mathrm{e}^2,-3/\mathrm{e}^2)=\begin{pmatrix}9/\mathrm{e}^6 & -3/\mathrm{e}^2\\ -3/\mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e}^2\end{pmatrix}\qquad \text{punto di minimo}\,.$$

**Esercizio 4**

La funzione proposta è continua e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, in quanto somma, composizione e rapporto di funzioni continue e derivabili. Resta da studiare solo il suo comportamento in $x=0$.

1. Ovviamente per $x\to 0^-$ si ottiene $f(x)\to 0=f(0)$. D'altra parte, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $\cos t$, con $t=2x$ o $t=4x$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(2x)-\cos(4x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-4x^2/2-1+16x^2/2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{6x^2}{x}=0\,.$$

Quindi $f$ è continua in $x=0$.

2. Calcolando la derivata di $f$ per $x \neq 0$, si ricava

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{[-2\sin(2x) + 4\sin(4x)]x - [\cos(2x) - \cos(4x)]}{x^2} & \text{se } x > 0, \\ 2x + 1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} (2x+1) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{[-2\sin(2x) + 4\sin(4x)]x - [\cos(2x) - \cos(4x)]}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-4x^2 + 16x^2 - 1 + 4x^2/2 + 1 - 16x^2/2}{x^2} = 6\,, \end{aligned}$$

dove si è usato anche lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $\sin t$, con $t = 2x$ e $t = 4x$. Pertanto, la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove presenta un punto angoloso. Il medesimo risultato si poteva ottenere anche calcolando direttamente il limite del rapporto incrementale nel punto $x = 0$.

**Esercizio 5**

Effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^x$, da cui $\mathrm{e}^x\ dx = dt$, si ottiene

$$\int \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{2\mathrm{e}^x + 5}\ dx = \mathrm{e} \int \frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x + 5}\ dx = \mathrm{e} \int \frac{1}{2t+5}\ dt \bigg|_{t=\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}}{2} \log(2\mathrm{e}^x + 5) + C\,.$$

Imponendo ora la condizione richiesta, si ricava

$$\frac{\mathrm{e}}{2} \log 7 + C = \frac{\mathrm{e}}{2} \log 7 + 1 \qquad \text{da cui} \qquad C = 1\,.$$

Pertanto la primitiva cercata è $\phi(x) = \frac{\mathrm{e}}{2} \log(2\mathrm{e}^x + 5) + 1$.

**Esercizio 6**

Ponendo $f(x) = x \sin x$, si ottiene che $f$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ e illimitata; inoltre

$$\lim_{x\to -\infty} x \sin x = \nexists\,.$$

## SOLUZIONI COMPITO C

**Esercizio 1**

1. Moltiplicando numeratore e denominatore per $1+\sqrt{3}i$ si ottiene $z = \frac{4i}{4} = i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$.
2. Tenendo conto del risultato precedente si ricava $z^6 = \mathrm{e}^{3i\pi} = -1$.

**Esercizio 2**

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $2\lambda^2 - 1 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{x/\sqrt{2}} + C_2 \mathrm{e}^{-x/\sqrt{2}}.$$

Dal metodo di somiglianza si ottiene, invece, che una soluzione particolare dell'equazione completa è $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, ovvero, dopo aver sostituito nell'equazione, si ricava $4a - ax^2 - bx - c = 2x^2$, da cui $a = -2$, $b = 0$ e $c = -8$. Pertanto la soluzione particolare è $y_p(x) = -2x^2 - 8$ e la soluzione completa dell'equazione differenziale è

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x/\sqrt{2}} + C_2 \mathrm{e}^{-x/\sqrt{2}} - 2x^2 - 8.$$

Imponendo ora le condizioni iniziali si ottiene

$$y(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{x/\sqrt{2}} + \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-x/\sqrt{2}} - 2x^2 - 8 = 9\cosh(x/\sqrt{2}) - 2x^2 - 8.$$

2. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $\cosh t$ con $t = x/\sqrt{2}$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{9\cosh(x/\sqrt{2}) - 2x^2 - 9}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{9(1 + x^2/4) - 2x^2 - 9}{x^2} = 1/4.$$

**Esercizio 3**

1. $C.E. = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$.
2. I punti stazionari per $f$ in $\mathbb{R}^2$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y^2 + \dfrac{8y}{x} = 0\,, \\ f_y(x,y) = 2xy + 8\log x = 0\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{array}{l} (x,y) = (1,0)\,, \\ (x,y) = (\mathrm{e}^2, -8/\mathrm{e}^2)\,. \end{array}$$

Calcolando la matrice Hessiana in tali punti, si ricava

$$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}\,,$$
$$Hf(\mathrm{e}^2, -8/\mathrm{e}^2) = \begin{pmatrix} 64/\mathrm{e}^6 & -8/\mathrm{e}^2 \\ -8/\mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e}^2 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di minimo}\,.$$

**Esercizio 4**

La funzione proposta è continua e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, in quanto somma, composizione e rapporto di funzioni continue e derivabili. Resta da studiare solo il suo comportamento in $x = 0$.

1. Ovviamente per $x \to 0^-$ si ottiene $f(x) \to 0 = f(0)$. D'altra parte, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $\cos t$, con $t = 4x$ o $t = 5x$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(4x) - \cos(5x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - 16x^2/2 - 1 + 25x^2/2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{9x^2/2}{x} = 0\,.$$

Quindi $f$ è continua in $x = 0$.

2. Calcolando la derivata di $f$ per $x \neq 0$, si ricava

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{[-4\sin(4x) + 5\sin(5x)]x - [\cos(4x) - \cos(5x)]}{x^2} & \text{se } x > 0, \\ 2x + 1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} (2x+1) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{[-4\sin(4x) + 5\sin(5x)]x - [\cos(4x) - \cos(5x)]}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-16x^2 + 25x^2 - 1 + 16x^2/2 + 1 - 25x^2/2}{x^2} = 9/2\,, \end{aligned}$$

dove si è usato anche lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $\sin t$, con $t = 4x$ e $t = 5x$. Pertanto, la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove presenta un punto angoloso. Il medesimo risultato si poteva ottenere anche calcolando direttamente il limite del rapporto incrementale nel punto $x = 0$.

**Esercizio 5**

Effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^x$, da cui $\mathrm{e}^x\ dx = dt$, si ottiene

$$\int \frac{\mathrm{e}^{x-2}}{4\mathrm{e}^x + 1}\,dx = \mathrm{e}^{-2}\int \frac{\mathrm{e}^x}{4\mathrm{e}^x + 1}\,dx = \mathrm{e}^{-2}\int \frac{1}{4t+1}\,dt\Big|_{t=\mathrm{e}^x} = \frac{1}{4\mathrm{e}^2}\log(4\mathrm{e}^x + 1) + C\,.$$

Imponendo ora la condizione richiesta, si ricava

$$\frac{1}{4\mathrm{e}^2}\log 5 + C = \frac{1}{4\mathrm{e}^2}\log 5 + 3 \qquad \text{da cui} \qquad C = 3\,.$$

Pertanto la primitiva cercata è $\phi(x) = \frac{1}{4\mathrm{e}^2}\log(4\mathrm{e}^x + 1) + 3$.

**Esercizio 6**

Ponendo $f(x) = x\sin x$, si ottiene che $f$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ e illimitata; inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin x = \nexists\,.$$

## SOLUZIONI COMPITO D

**Esercizio 1**

1. Moltiplicando numeratore e denominatore per $1+\sqrt{3}i$ si ottiene $z = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{i\pi/6}$.
2. Tenendo conto del risultato precedente si ricava $z^3 = \mathrm{e}^{i\pi/2} = i$.

**Esercizio 2**

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $4\lambda^2 - 1 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = \pm 1/2$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{x/2} + C_2 \mathrm{e}^{-x/2}.$$

Dal metodo di somiglianza si ottiene, invece, che una soluzione particolare dell'equazione completa è $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, ovvero, dopo aver sostituito nell'equazione, si ricava $8a - ax^2 - bx - c = 4x^2$, da cui $a = -4$, $b = 0$ e $c = -32$. Pertanto la soluzione particolare è $y_p(x) = -4x^2 - 32$ e la soluzione completa dell'equazione differenziale è

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x/2} + C_2 \mathrm{e}^{-x/2} - 4x^2 - 32.$$

Imponendo ora le condizioni iniziali si ottiene

$$y(x) = \frac{33}{2}\mathrm{e}^{x/2} + \frac{33}{2}\mathrm{e}^{-x/2} - 4x^2 - 32 = 33\cosh(x/2) - 4x^2 - 32.$$

2. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $\cosh t$ con $t = x/\sqrt{3}$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{33\cosh(x/2) - 4x^2 - 33}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{33(1+x^2/8) - 4x^2 - 33}{x^2} = 1/8.$$

**Esercizio 3**

1. $C.E. = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.
2. I punti stazionari per $f$ in $\mathbb{R}^2$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy - 2\log y = 0, \\ f_y(x,y) = x^2 - \dfrac{2x}{y} = 0, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{array}{l} (x,y) = (0,1), \\ (x,y) = (2/\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2). \end{array}$$

Calcolando la matrice Hessiana in tali punti, si ricava

$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella},$$
$$Hf(2/\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^2 & 2/\mathrm{e}^2 \\ 2/\mathrm{e}^2 & 4/\mathrm{e}^6 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di minimo}.$$

**Esercizio 4**

La funzione proposta è continua e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, in quanto somma, composizione e rapporto di funzioni continue e derivabili. Resta da studiare solo il suo comportamento in $x = 0$.

1. Ovviamente per $x \to 0^+$ si ottiene $f(x) \to 0 = f(0)$. D'altra parte, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $\cos t$, con $t = 2x$ o $t = 3x$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(2x) - \cos(3x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - 4x^2/2 - 1 + 9x^2/2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{5x^2/2}{x} = 0\,.$$

Quindi $f$ è continua in $x = 0$.

2. Calcolando la derivata di $f$ per $x \neq 0$, si ricava

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x > 0, \\ \dfrac{[-2\sin(2x) + 3\sin(3x)]x - [\cos(2x) - \cos(3x)]}{x^2} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} (2x+1) = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{[-2\sin(2x) + 3\sin(3x)]x - [\cos(2x) - \cos(3x)]}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-4x^2 + 9x^2 - 1 + 4x^2/2 + 1 - 9x^2/2)}{x^2} = 5/2\,, \end{aligned}$$

dove si è usato anche lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $\sin t$, con $t = 2x$ e $t = 3x$. Pertanto, la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove presenta un punto angoloso. Il medesimo risultato si poteva ottenere anche calcolando direttamente il limite del rapporto incrementale nel punto $x = 0$.

**Esercizio 5**

Effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^{2x}$, da cui $\mathrm{e}^{2x}\ dx = \frac{1}{2}dt$, si ottiene

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{\mathrm{e}^{2x} - 4}\ dx = \mathrm{e}^{-1} \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} - 4}\ dx = \frac{1}{2\mathrm{e}} \int \frac{1}{t-4}\ dt\Big|_{t=\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1}{2\mathrm{e}} \log|\mathrm{e}^{2x} - 4| + C\,.$$

Imponendo ora la condizione richiesta, si ricava

$$\frac{1}{2\mathrm{e}} \log 1 + C = 2 \qquad \text{da cui} \qquad C = 2\,.$$

Pertanto la primitiva cercata è $\phi(x) = \frac{1}{2\mathrm{e}} \log|\mathrm{e}^{2x} - 4| + 2$.

**Esercizio 6**

Ponendo $f(x) = \sin x$, si ottiene che $f$ è definita e limitata su tutto $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to -\infty} \sin x = \nexists\,.$$