A N A L I S I III	cognome e nome	firma
appello del 13 luglio 2005		

1. Sia assegnata la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 2(x-n) + 1/n & \text{se } n \le x \le n + 1/2; \\ -2(x-n-1) + 1/n & \text{se } n + 1/2 < x \le n+1; \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [n, n+1]. \end{cases}$$

a) Calcolare il limite puntuale di tale successione.
b) Stabilire se la successione converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.
c) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{100} f_n(x)\, dx \,,$$

giustificando la risposta.

---

2. Siano assegnati i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} 2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \quad .$$

a) Stabilire *a priori* se essi ammettono soluzione unica, locale o globale.
b) Determinare esplicitamente le rispettive soluzioni.

---

3. Calcolare

$$\iint_T y\sqrt{x^2+y^2}\; \mathrm{e}^{x\sqrt{x^2+y^2}}\; dx\; dy \,,$$

dove $T \subseteq \mathbb{R}^2$ è l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y \ge 0,\; x^2+y^2 \le 1\}$.

---

4. Sia data la funzione

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z} \quad ; \quad z \in \mathbb{C} \,.$$

a) Determinarne gli insiemi di definizione e di olomorfia.
b) Calcolarne il residuo relativo al punto $z_0 = 1$.

Tempo:
2.30 ore