SOLUZIONI COMPITO 13.07.05

Esercizio 1

Osserviamo innanzitutto che la successione proposta è costituita da funzioni non negative definite su tutto l'asse reale.

a) Poiché, fissato $x \in \mathbb{R}$, per $n_0 \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande (cioè $n_0 > x$), si ha che, per ogni $n \geq n_0$, $x \in \mathbb{R} \setminus [n, n+1]$ e quindi $f_n(x) \equiv 0$, si ottiene subito che la successione proposta converge alla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) \equiv 0$.

b) Poiché

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = \max_{x\in[n,n+1]} f_n(x) = 1 + 1/n \to 1 \neq 0\,,$$

non vi è convergenza uniforme su $\mathbb{R}$.

c) Poiché per ogni $n \geq 100$ si ha $f_n(x) \equiv 0$ in $[0, 100]$, si ottiene banalmente che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{100} f_n(x)\ dx = 0\,.$$

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è di Bernoulli e si può riscrivere nella forma

$$y'(x) + \frac{y(x)}{2} \cot x = \frac{y^3(x)}{2} \sin x\,.$$

Poiché la funzione $x \mapsto \cot x$ non è definita per $x = k\pi$, studieremo la soluzione in intervalli del tipo $(k\pi, (k+1)\pi)$, dove la cotangente è definita e continua. In particolare, tenendo conto delle condizioni iniziali assegnate nei problemi di Cauchy in esame, considereremo l'intervallo $(0, \pi)$. Ponendo

$$f(x, y) = \frac{y^3}{2} \sin x - \frac{y}{2} \cot x\,,$$

si ottiene che $f \in \mathcal{C}^0\big((0, \pi) \times \mathbb{R}\big)$ e $f_y = \frac{3}{2}y^2 \sin x - \frac{1}{2} \cot x$, ovvero f_y è limitata se $(x, y) \in [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$, con $0 < \alpha < \pi/2 < \beta < \pi$ e $-\infty < \gamma < y_0 < \delta < +\infty$. Per i due problemi di Cauchy proposti si ha quindi esistenza e unicità locale. Veniamo ora al calcolo esplicito delle soluzioni. Nel caso in cui la condizione iniziale sia $y(\pi/2) = 0$, l'unica soluzione è data dalla funzione $y(x) \equiv 0$, che è proprio l'integrale singolare ed è definito su tutto l'intervallo $(0, \pi)$. Nel caso in cui la condizione iniziale sia $y(\pi/2) = 1$, ponendo $z(x) = y^{-2}(x)$, l'equazione differenziale si può riscrivere nella forma

$$z'(x) - z(x) \cot x = -\sin x$$

da cui, utilizzando la formula risolutiva delle equazioni lineari del primo ordine, si ricava

$$\begin{aligned}
z(x) &= \mathrm{e}^{\int \cot x\ dx} \left[\int \mathrm{e}^{-\int \cot x\ dx}(-\sin x)\ dx + C\right] = \mathrm{e}^{\log|\sin x|} \left[\int \mathrm{e}^{-\log|\sin x|}(-\sin x)\ dx + C\right] \\
&= |\sin x| \left[\int -\frac{\sin x}{|\sin x|}\ dx + C\right] = \sin x \left[\int -\frac{\sin x}{\sin x}\ dx + C\right] \\
&= -x \sin x + C \sin x = (C - x) \sin x\,,
\end{aligned}$$

ove, per eliminare il valore assoluto, si è tenuto conto che $x \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi)$. Imponendo ora la condizione $y(\pi/2) = 1$, si ottiene l'equazione $1 = -\pi/2 + C$, da cui $C = 1 + \pi/2$. La soluzione richiesta è, pertanto,

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \pi/2 - x) \sin x}}\,.$$

Per concludere, osserviamo che in $(0, \pi)$ la funzione $x \mapsto \sin x$ è positiva, quindi $y(x)$ è definita esclusivamente dove $1 + \pi/2 - x > 0$, ovvero per $x \in (0, 1 + \pi/2) \subset (0, \pi)$. Inoltre

$$\lim_{x\to0^+} y(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to(1+\pi/2)^-} y(x) = +\infty\,.$$

Esercizio 3

Osserviamo innanzitutto che l'insieme T non è altro che la porzione del cerchio di centro l'origine e raggio unitario, posta al di sopra dell'asse x. Effettuando un cambiamento in coordinate polari, si ottiene

$$\iint_T y\sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{e}^{x\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\ dy = \int_0^1 r^3 \left(\int_0^\pi \sin\theta\ \mathrm{e}^{r^2\cos\theta}\ d\theta \right)\ dr$$
$$= \int_0^1 r^3 \left(-\frac{1}{r^2}\ \mathrm{e}^{r^2\cos\theta} \Big|_0^\pi \right)\ dr = -\int_0^1 r(\mathrm{e}^{-r^2} - \mathrm{e}^{r^2})\ dr$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-r^2} + \mathrm{e}^{r^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2} - 1 = \cosh 1 - 1\,.$$

Esercizio 4

La funzione proposta è definita nell'insieme $I_{def} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ z \neq 0,\ z \neq 1\}$. Poiché essa è ottenuta mediante composizione di funzioni olomorfe nel proprio insieme di definizione, è essa stessa una funzione olomorfa in I_{def}. Inoltre, se γ è una qualunque curva chiusa contenente solo la lacuna $z_0 = 1$, si ha

$$\mathrm{Res}(f, z_0 = 1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)}\ dz\,.$$

D'altra parte si ha anche

$$\mathrm{Res}(f, z_0 = 1) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-1)^n f(z)\right]\,,$$

dove n è l'ordine del polo di f. Poiché, per $z \to 1$,

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{1/z}}{1-z} \sim \frac{\mathrm{e}}{1-z}\,,$$

si ricava subito che $z_0 = 1$ è polo di ordine 1. Quindi,

$$\mathrm{Res}(f, z_0 = 1) \lim_{z\to 1} \left[(z-1) f(z)\right] = \lim_{z\to 1} -\mathrm{e}^{1/z} = -\mathrm{e}\,.$$