13 DICEMBRE 2002 — SOLUZIONI COMPITO VECCHIO ORDINAMENTO

Esercizio 1.

La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = \mathbb{R}$. Poiché per $x < -2$ e $x > 0$, si ha $x^2 + 2x > 0$, utilizzando i limiti notevoli, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \left[x - \sqrt{|x^2+2x|}\right] = \lim_{x\to+\infty} -x\left[\sqrt{1+2/x} - 1\right] = \lim_{x\to+\infty} -x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x} = -1 \ ;$$

pertanto $y = -1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Invece,

$$\lim_{x\to-\infty} \left[x - \sqrt{|x^2+2x|}\right] = \lim_{x\to-\infty} [x - |x|] = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty \ .$$

Poiché, per $x \to -\infty$, la funzione è infinita di ordine 1 rispetto ad x, studiamo se c'è asintoto obliquo. Dai calcoli fatti precedentemente si ricava

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - 2x] = -\lim_{x\to-\infty} \left[x + \sqrt{x^2+2x}\right] = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - (x^2+2x)}{x - \sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{2x} = 1 \ ,$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che, per $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2+2x} \sim |x| = -x$. Pertanto, $y = 2x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Osserviamo che la funzione proposta è continua in tutto $\mathbb{R}$, in quanto somma e composizione di funzioni continue. Ovviamente, $f(0) = 0$ e per $x < 0$, la funzione è negativa. Per $x > 0$, si ottiene, invece, che

$$\begin{array}{lclcl} f(x) < 0 & \iff & x < \sqrt{|x^2+2x|} & \iff & x^2 < |x^2+2x| \\ & \iff & x^2 < x^2 + 2x & \iff & x > 0 \end{array}$$

in quanto, come già osservato, per $x > 0$, $x^2 + 2x = x(x+2) > 0$. Pertanto, la funzione proposta è sempre negativa, per $x \neq 0$. Possiamo riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2+2x} & \text{se } x < -2, \ x > 0 \ ; \\ x - \sqrt{-x^2-2x} & \text{se } -2 \le x \le 0 \ ; \end{cases}$$

pertanto

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} & \text{se } x < -2, \ x > 0 \ ; \\ 1 + \dfrac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}} & \text{se } -2 < x < 0 \ ; \end{cases}$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to-2^\pm} f'(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x\to0^\pm} f'(x) = \mp\infty$$

quindi i punti $x = -2$ e $x = 0$ sono punti di non derivabilità, dove f presenta due cuspidi. Dallo studio del segno di $f'(x)$, si ottiene

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & \text{per} & x < -2 \ , \ -1 - 1/\sqrt{2} < x < 0 \ , \\ f'(x) < 0 & \text{per} & -2 < x < -1 - 1/\sqrt{2} \ , \ x > 0 \ , \\ f'(x) = 0 & \text{per} & x = -1 - 1/\sqrt{2} \quad \text{che risulta essere un punto di minimo relativo} \ , \end{array}$$

inoltre, i punti $x = -2$ e $x = 0$ sono punti di massimo relativo. Infine

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{|x^2+2x|^3}} \qquad \text{per} \quad x < -2, \ -2 < x < 0 \ , x > 0 \ ;$$

da cui si ottiene che $f''(x)$ è sempre positiva, dove è definita e quindi f è convessa. Per completezza, osserviamo che nei due punti di massimo relativo si ha: $f(-2) = -2$, $f(0) = 0$; pertanto $x = 0$ è punto di massimo assoluto.

Il grafico è

Esercizio 2.

Poniamo $a_n(x) = (n^x + 1)\sin\Big(\tan(1/n)\Big)$ e ricordiamo che $\sin\Big(\tan(1/n)\Big) \sim \tan(1/n) \sim 1/n$. Allora,

- per $x < 0$, si ottiene che $a_n(x) \sim \sin\Big(\tan(1/n)\Big) \sim \frac{1}{n} \to 0$;
- per $x = 0$, si ottiene che $a_n(0) = 2\sin\Big(\tan(1/n)\Big) \sim \frac{2}{n} \to 0$;
- per $x > 0$, si ottiene che

$$a_n(x) \sim n^x \cdot \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^{1-x}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < 1 \ , \\ 1 & \text{se } x = 1 \ , \\ +\infty & \text{se } x > 1 \ . \end{cases}$$

Ricapitolando, la successione proposta è infinitesima per $x < 1$, converge ad 1 per $x = 1$ ed è infinita per $x > 1$.

Esercizio 3. L'integrale proposto va studiato in un intorno di 0^+ e in un intorno di $+\infty$. Utilizzando il teorema del confronto asinototico per gli integrali, otteniamo

$$\begin{array}{lll} U(0^+) & f(x) \sim \dfrac{x^2}{x^{5/2} \cdot 4} = \dfrac{1}{4x^{1/2}} & \text{che ha integrale convergente,} \\ U(+\infty) & f(x) \sim \dfrac{2\log x}{x^{5/2} \cdot 3x^3} = \dfrac{2}{3x^{11/2}(\log x)^{-1}} & \text{che ha integrale convergente,} \end{array}$$

quindi la funzione proposta è integrabile in senso improprio in $(0, +\infty)$.

Esercizio 4.

Poniamo $z = a + ib$, da cui $\mathrm{Im}(z) = b$. L'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\mathrm{e}^{2a-3b} \cdot \mathrm{e}^{2bi} = \mathrm{e}^0 \cdot \mathrm{e}^{\pi i} \ ,$$

da cui, uguagliando i moduli e gli argomenti, a meno di multipli di 2π, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2a - 3b = 0 \ , \\ 2b = (2k+1)\pi \ , \quad k \in \mathbf{Z} \ ; \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a = 3b/2 \ , \\ b = \pi/2 + k\pi \ , \quad k \in \mathbf{Z} \ . \end{cases}$$

Imponendo la condizione $b \in (-\pi, \pi)$, si ricava $b = \pm\frac{\pi}{2}$ e quindi $a = \pm\frac{3}{4}\pi$, da cui le due soluzioni $z_1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}i$ e $z_2 = -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}i$.