A N A L I S I III	cognome e nome	firma
appello del 14 settembre 2005		

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{1/n^2 + x^2 \log x} .$$

a) Verificare che la successione $\{f_n\}$ è monotona crescente (cioè, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in (1, +\infty)$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$).

b) Determinare, se esiste, la funzione $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ limite della successione $\{f_n\}$.

c) Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f_n(x)\ dx .$$

FAC.: Giustificare la risposta.

---

2. Determinare la soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\sin x}{2}\ y^3(x) + \dfrac{\sin x}{4 \cos x}\ y(x) \\ y(0) = 1/\sqrt{2} . \end{cases}$$

FAC.: Dimostrare esistenza e unicità a priori della soluzione.

---

3. Calcolare

$$\iint_E x\mathrm{e}^{x^2+y}\ dx\ dy ,$$

dove $E \subseteq \mathbb{R}^2$ è l'insieme definito da $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in [0, 1],\ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

---

4. Si consideri la funzione

$$f(z) = z\mathrm{e}^z \qquad z \in \mathbb{C} .$$

a) Stabilire che f è intera;

b) determinare una primitiva F di f ;

c) calcolare $\int_\gamma f(z)\ dz$, dove

i) γ è la circonferenza unitaria centrata nell'origine,

ii) γ è il segmento di retta congiungente l'origine con il punto $P = (1, 1)$.

Tempo:
2.30 ore