SOLUZIONI COMPITO 14.09.05

Esercizio 1

a) Osservando che la successione $\{1/n^2\}$ è monotona decrescente, si ricava che, per ogni $x \in (1, +\infty)$,

$$\frac{1}{n^2} + x^2 \log x \geq \frac{1}{(n+1)^2} + x^2 \log x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tenendo conto che il reciproco di una successione decrescente è crescente e che $x > 0$, si ottiene subito che la successione proposta è monotona crescente.

b) Fissato $x \in (1, +\infty)$ e tenendo conto che $1/n^2 \to 0$, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{1/n^2 + x^2 \log x} = \frac{x}{x^2 \log x} = \frac{1}{x \log x} = f(x).$$

c) Dal Teorema di Convergenza Monotona, si ricava

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f_n(x)\, dx &= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\, dx \\ &= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x \log x}\, dx = \log(\log x)\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \log 2.\end{aligned}$$

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è di Bernoulli e si può riscrivere nella forma

$$y'(x) - \frac{\tan x}{4}\, y(x) = \frac{\sin x}{2} y^3(x).$$

Poiché la funzione $x \mapsto \tan x$ non è definita per $x = (2k+1)\pi/2$, studieremo la soluzione in intervalli del tipo $((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$, dove la tangente è definita e continua. In particolare, tenendo conto delle condizioni iniziali assegnate nel problema di Cauchy in esame, considereremo l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Ponendo

$$f(x, y) = \frac{\tan x}{4}\, y(x) + \frac{\sin x}{2} y^3(x),$$

si ottiene che $f \in \mathcal{C}^0\big((-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}\big)$ e $f_y = \frac{\tan x}{4} + \frac{3 \sin x}{2} y^2$, ovvero f_y è limitata se $(x, y) \in [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$, con $-\pi/2 < \alpha < 0 < \beta < \pi/2$ e $-\infty < \gamma < 1/\sqrt{2} < \delta < +\infty$. Per il problema di Cauchy proposto si ha quindi esistenza e unicità locale.

Veniamo ora al calcolo esplicito della soluzione. Ponendo $z(x) = y^{-2}(x)$, l'equazione differenziale si può riscrivere nella forma

$$z'(x) + \frac{\sin x}{2 \cos x}\, z(x) = -\sin x$$

da cui, utilizzando la formula risolutiva delle equazioni lineari del primo ordine, si ricava

$$\begin{aligned} z(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx} \left[\int \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx} (-\sin x)\, dx + C \right] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log|\cos x|} \left[\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\log|\cos x|} (-\sin x)\, dx + C \right] \\ &= \sqrt{|\cos x|} \left[\int -\frac{\sin x}{\sqrt{|\cos x|}}\, dx + C \right] = \sqrt{\cos x}\, \big[2\sqrt{\cos x} + C \big] = 2 \cos x + C \sqrt{\cos x}, \end{aligned}$$

ove, per eliminare il valore assoluto, si è tenuto conto che $x \in [\alpha, \beta] \subset (-\pi/2, \pi/2)$, intervallo in cui la funzione coseno è non negativa. Imponendo ora la condizione $y(0) = 1/\sqrt{2}$, che fornisce $z(0) = 2$, si ottiene l'equazione $2 = 2 + C$, da cui $C = 0$. La soluzione richiesta è, pertanto,

$$z(x) = 2 \cos x \qquad \text{ovvero} \qquad y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cos x}}.$$

Esercizio 3

Osserviamo innanzitutto che l'insieme E non è altro che la porzione del primo quadrante sottostante alla parabola di equazione $y = 1 - x^2$. Integrando quindi, prima rispetto ad y e poi rispetto ad x, si ottiene

$$\iint_E x\mathrm{e}^{x^2+y}\ dx\ dy = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\left(\int_0^{1-x^2} \mathrm{e}^y\ dy\right)\ dx$$
$$= \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\left(\mathrm{e}^{1-x^2} - 1\right)\ dx = \int_0^1 \left(x\mathrm{e} - x\mathrm{e}^{x^2}\right)\ dx$$
$$= \left(\frac{x^2}{2}\ \mathrm{e} - \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{x^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1) = \frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 4

a) Ponendo $z = x+iy$ ed $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, si ottiene $f(z) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + i\mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y)$, da cui

$$\begin{cases} u(x,y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) \\ v(x,y) = \mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y) \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} u_x = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) = v_y \\ u_y = \mathrm{e}^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) = -v_x\,. \end{cases}$$

Poiché sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann, f è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$, cioè è intera. Osserviamo che al medesimo risultato si poteva pervenire tenendo conto che il prodotto di funzioni intere è ancora una funzione intera e che le funzioni $z \mapsto z$ e $z \mapsto \mathrm{e}^z$ sono intere.

b) Una primitiva F di f si ottiene prendendo $F(z) = (z-1)\mathrm{e}^z$.

c) i) Poiché la circonferenza unitaria centrata nell'origine è una curva regolare chiusa, per il Teorema dell'Integrale Nullo, si ottiene che

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0\,.$$

ii) Poiché f ammette primitiva F, l'integrale lungo il segmento di retta congiungente l'origine con il punto $P = 1+i$ si ottiene semplicemente calcolando $F(P) - F(1) = i\mathrm{e}^{i+1} + 1$.

Alternativamente, poiché il segmento di retta congiungente l'origine con il punto $P = (1,1)$ può essere parametrizzato da $x = t$, $y = t$ con $t \in [0,1]$, l'integrale richiesto sarà dato da

$$\int_0^1 \mathrm{e}^t[(t\cos t - t\sin t) - (t\cos t + t\sin t)]\ dt + i\int_0^1 \mathrm{e}^t[(t\cos t - t\sin t) + (t\cos t + t\sin t)]\ dt =$$
$$-2\int_0^1 (t\mathrm{e}^t\sin t - it\mathrm{e}^t\cos t)\ dt = 2i\int_0^1 t\mathrm{e}^t(i\sin t + \cos t)\ dt =$$
$$2i\int_0^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{e}^{it}\ dt = 2i\left[\frac{t}{1+i}\mathrm{e}^{t(1+i)} - \frac{1}{(1+i)^2}\mathrm{e}^{t(1+i)}\right]\Big|_0^1 = \frac{2i}{1+i}\left[\frac{1+i}{2}\mathrm{e}^{1+i} + \frac{1-i}{2}\right] =$$
$$i\mathrm{e}^{i+1} + \frac{i(1-i)}{1+i} = i\mathrm{e}^{1+i} + 1\,,$$

dove, per risolvere l'ultimo integrale, abbiamo operato per parti.