SOLUZIONI COMPITO

Esercizio 1

C.E. $= I\!R \setminus \{-1, 0\}$, $\quad f(x) > 0 \;\; \forall x \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$, $\quad f(x) < 0 \;\; \forall x < -1$;

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \qquad y = 0$ asintoto orizzontale a $\pm\infty$;

$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \pm\infty \qquad x = -1$ asintoto verticale;

$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = 0 \qquad f$ è prolungabile con continuità in $x = 0$;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(-x^2+x+1)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2(x+1)^2} & \text{se } x > 0; \\ -\frac{(x^2+x+1)\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2(x+1)^2} & \text{se } x < -1, \ -1 < x < 0; \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = 0$; $\quad f$è prolungabile in modo derivabile in $x = 0$;

$f'(x) < 0$ per $x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\qquad f'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Esercizio 2

Poniamo $a_n = \frac{n^\alpha 3^n}{n!}$ ed osserviamo che la serie proposta è a termini positivi; pertanto, applicando il criterio del rapporto, otteniamo facilmente

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^\alpha 3^{n+1}}{(n+1)!} \, \frac{n!}{n^\alpha 3^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha 3}{n+1} = 0 < 1 \qquad \forall \alpha \in I\!R \ .$$

Quindi la serie proposta converge per tutti gli $\alpha \in I\!R$.

Esercizio 3

Effettuando la sostituzione $t = (x-3)^2$, ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per $\sin t$, si ottiene:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{\sin(x-3)^2 - (x-3)^2}{(x-3)^4} = \lim_{t \to 0^+} \frac{-t^3/6}{t^2} = 0 \ ,$$

mentre

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \frac{\log 4}{3} \ .$$

Pertanto $x = 3$ è un punto di discontinuità di salto.

Esercizio 4

Effettuando un cambiamento di variabile $t = \log x$ ed osservando che $\frac{1}{x}\, dx = dt$, l'integrale proposto si riscrive nella forma

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}} \frac{\log(\log x)}{x \log x} \, dx = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\log t}{t} \, dt \ .$$

Effettuando un ulteriore cambiamento di variabile $s = \log t$ ed osservando che $\frac{1}{t}\, dt = ds$, l'integrale proposto assume la forma finale data da

$$\int_0^1 s \, ds = \left. \frac{s^2}{2} \right|_0^1 = 1/2 \ .$$