15 LUGLIO 2004 — SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1.

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che non ammette nessun integrale singolare. Separando le variabili ed integrando, otteniamo

$$\int y\ dy = nx + C \qquad \text{da cui} \qquad \frac{y^2(x)}{2} = nx + C\ .$$

Imponendo la condizione iniziale, si ottiene $C = 1/2$, da cui $y_n(x) = \sqrt{2nx+1}$. Notiamo che è stata considerata la soluzione ottenuta estraendo la radice positiva, in quanto il valore assunto dalla soluzione nel punto iniziale è positivo.
- L'intervallo aperto massimale di definizione della soluzione è dato dalla condizione $2nx + 1 > 0$, ovvero $x \in (-1/2n, +\infty)$, che garantisce la positività dell'argomento della radice quadrata.
- Infine, per il calcolo del limite richiesto, procediamo come segue:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n(1)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}\ .$$

Esercizio 2. Osserviamo che, per stabilire se l'integrale proposto esiste finito, bisogna innanzitutto studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno di $+\infty$.

- Per $\alpha = 1$ e $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}\ .$$

Quindi l'integrale diverge, poiché la funzione $x \mapsto 1/x$ non è impropriamente integrabile all'infinito.
- Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1 + x^2 + (1-\alpha)\log(1+x)} \sim \frac{x^\alpha}{x^2} = \frac{1}{x^{2-\alpha}}\ .$$

Quindi l'integrale convergerà per il criterio del confronto asintotico, se e solo se $2 - \alpha > 1$, ovvero per $\alpha < 1$. Poiché, in tal caso, in ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[1, M]$, la funzione è continua e quindi integrabile in senso proprio, si ha che l'integrale improprio esiste finito solo per $\alpha < 1$.

Esercizio 3.

- Determiniamo, dapprima, i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$, imponendo l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = (1+x)\mathrm{e}^{x+y} = 0 \\ f_y(x,y) = x\mathrm{e}^{x+y} = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

ovvero il sistema è impossibile. Pertanto, la funzione proposta non ammette punti estremanti nel piano.
- Poiché f è continua e T è un insieme chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in T. Dal punto precedente, sappiamo che all'interno del triangolo T non ci sono estremanti, pertanto essi saranno necessariamente sulla frontiera. Ossarviamo che in T, f è sempre non negativa e che sul lato OB essa è nulla, pertanto tutti i punti della forma $(0, y)$, con $y \in [0, 2]$ sono punti di minimo assoluto in T. Studiamo ora la funzione sui restanti lati OA e AB. Il lato OA è costituito dai punti della forma $(x, 0)$, con $x \in [0, 1]$, e si ha $f(x, 0) =: g_1(x) = x\mathrm{e}^x$. Derivando, otteniamo $g_1'(x) = (1 + x)\mathrm{e}^x > 0$, per ogni $x \in [0, 1]$, quindi la funzione è crescente sul lato OA ed assume il valore minimo nel punto $(0, 0)$ e il valore massimo nel punto $(1, 0)$. Il lato AB è costituito dai punti della forma $(x, 2 - 2x)$, con $x \in [0, 1]$, e si ha $f(x, 2-2x) =: g_2(x) = x\mathrm{e}^{2-x}$. Derivando, otteniamo $g_2'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{2-x} > 0$, per ogni $x \in [0, 1]$, quindi la funzione è crescente sul lato AB ed assume il valore minimo nel punto $(0, 2)$ e il valore massimo nel punto $(1, 0)$. Quindi il punto di massimo assoluto per f in T è il punto $(1, 0)$.

Domanda 1. Poiché tutte le funzioni differenziabili in $I\!R^2$ sono continue in $I\!R^2$ ed ammettono in ogni punto derivate direzionali lungo ogni direzione (e quindi, in particolare, anche derivate parziali), mentre, in generale, non è detto che abbiano le derivate parziali continue, l'unica risposta esatta è la (b).

Domanda 2. Ad esempio, possiamo considerare la funzione

$$f(x,y) = x + |y-1| \ .$$

Infatti,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,1+t)-f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0 \ . \end{cases}$$

15 LUGLIO 2004 — SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1.

- Per ogni $n \in I\!N$, l'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ammette come unico integrale singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non soddisfa la condizione iniziale. Separando le variabili ed integrando, otteniamo

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = nx + C \qquad \text{da cui} \qquad -\frac{1}{y(x)} = nx + C\ .$$

Imponendo la condizione iniziale, si ottiene $C = 2$, da cui $y_n(x) = -\frac{1}{nx+2}$.

- L'intervallo aperto massimale di definizione della soluzione è dato dalla condizione $nx + 2 > 0$, ovvero $x \in (-2/n, +\infty)$, che garantisce che il denominatore non si annulli. Notiamo che è stato considerato l'intervallo destro, in quanto esso devo contenere il punto iniziale $x = 0$.
- Infine, per il calcolo del limite richiesto, procediamo come segue:

$$\lim_{n\to+\infty} ny_n(1/2) = \lim_{n\to+\infty} n\left(-\frac{1}{n/2+2}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{n}{n/2} = -2\ .$$

Esercizio 2. Osserviamo che, per stabilire se l'integrale proposto esiste finito, bisogna innanzitutto studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno di $+\infty$.

- Per $\alpha = 0$ e $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3} \sim \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}\ .$$

Quindi l'integrale diverge, poiché la funzione $x \mapsto 1/x$ non è impropriamente integrabile all'infinito.

- Per $\alpha \in I\!R$ e $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^{2\alpha+3} + \alpha \log x^2} \sim \begin{cases} \frac{x^2}{2\alpha \log x} \to +\infty & \text{se } \alpha < -3/2\ ; \\ \frac{x^2}{x^{2\alpha+3}} = \frac{1}{x^{2\alpha+1}} & \text{se } \alpha > -3/2\ . \end{cases}$$

Quindi l'integrale convergerà per il criterio del confronto asintotico, se e solo se $2\alpha + 1 > 1$, ovvero per $\alpha > 0$. Poiché, in tal caso, in ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[1, M]$, la funzione è continua e quindi integrabile in senso proprio, si ha che l'integrale improprio esiste finito solo per $\alpha > 0$.

Esercizio 3.

- Determiniamo, dapprima, i punti stazionari di f in $I\!R^2$, imponendo l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y^2 e^{xy} = 0 \\ f_y(x,y) = (1+yx)e^{xy} = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero il sistema è impossibile. Pertanto, la funzione proposta non ammette punti estremanti nel piano.

- Poiché f è continua e T è un insieme chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in T. Dal punto precedente, sappiamo che all'interno del triangolo T non ci sono estremanti, pertanto essi saranno necessariamente sulla frontiera. Ossarviamo che in T, f è sempre non negativa e che sul lato OA essa è nulla, pertanto tutti i punti della forma $(x, 0)$, con $x \in [0, 1]$ sono punti di minimo assoluto in T. Studiamo ora la funzione sui restanti lati AB e OB. Il lato AB è costituito dai punti della forma $(1, y)$, con $y \in [0, 2]$, e si ha $f(1, y) =: g_1(y) = ye^y$. Derivando, otteniamo $g_1'(y) = (1 + y)e^y > 0$, per ogni $y \in [0, 2]$, quindi la funzione è sempre crescente ed assume il valore minimo nel punto $(1, 0)$ e il valore massimo nel punto $(1, 2)$. Il lato $0B$ è costituito dai punti della forma $(x, 2x)$, con $x \in [0, 1]$, e si ha $f(x, 2x) =: g_2(x) = 2xe^{2x^2}$. Derivando, otteniamo $g_2'(x) = (2 + 8x^2)e^{2x^2} > 0$, per ogni $x \in [0, 1]$, quindi la funzione è crescente sul lato OB ed assume il valore minimo nel punto $(0, 0)$ e il valore massimo nel punto $(1, 2)$. Quindi il punto di massimo assoluto per f in T è il punto $(1, 2)$.

Domanda 1. Poiché tutte le funzioni differenziabili in $\mathbb{R}^2$ sono continue in $\mathbb{R}^2$ ed ammettono in ogni punto derivate direzionali lungo ogni direzione (e quindi, in particolare, anche derivate parziali), mentre, in generale, non è detto che abbiano le derivate parziali continue, l'unica risposta esatta è la (c).

Domanda 2. Ad esempio, possiamo considerare la funzione

$$f(x, y) = |x - 2| + y \ .$$

Infatti,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(2 + t, 0) - f(2, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0 \ . \end{cases}$$