CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 16 gennaio 2009	**TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I <u>NON</u> devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Determinare per quali valori del parametro reale α la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{3n} \frac{[\log(\mathrm{e}^{-3n}+1)]^{5\alpha^2}}{(\mathrm{e}^{3n}+1)^{1-4\alpha}}$$

converge.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{(1-2x)(\mathrm{e}^{y(x)}-1)}{(1+x^2)\mathrm{e}^{y(x)}}\,.$$

1. Determinare l'integrale generale.
2. Determinare l'unica soluzione y_1 della precedente equazione differenziale che soddisfa la condizione $y_1(0) = 1$.
3. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} y_1(x)\,,$$

dove y_1 è la soluzione precedentemente trovata.

---

3. Calcolare

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{e}^{[\log^5 x + 4\log(\log x)]}}{x}\,dx\,.$$

---

4. Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione

$$f(x) = \frac{\sin^\alpha x + \cos x - 1}{[2\mathrm{e}^x - \log(1+2x) - 2]^{\alpha^2-1}}$$

ha ordine di infinitesimo pari a 2 , per $x \to 0^+$.

---

5. Sia $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1([1,+\infty))$, positiva, infinitesima per $x \to +\infty$, tale che $f(1) = 1$ e $f'(x) < 0$ in $[1,+\infty)$. Dimostrare che f è invertibile e che la funzione inversa $g := f^{-1}$ è definita in $(0,1]$ e soddisfa le seguenti proprietà: $g(1) = 1$, g ha un asintoto verticale per $x \to 0^+$, $g \in \mathcal{C}^1((0,1])$ e

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_0^1 \frac{y}{f'(g(y))}\,dy \quad \text{converge}\,.$$

Dimostrare, inoltre, che

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{per} \quad x \to +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(y) \sim \frac{1}{y^{1/\alpha}} \quad \text{per} \quad y \to 0^+\,.$$

---

6. Determinare l'insieme di definizione della funzione definita da

$$f(x,y) = \log(5|x+y| - x^2 - y^2 - 2xy)\,.$$

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 16 gennaio 2009	**TEMA B** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Determinare per quali valori del parametro reale α la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\sin(e^{-2n})]^{\alpha-1}}{e^{2n}(\sqrt{1+e^{-2n}}-1)^{\alpha^2}}$$

converge.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{[1+y^3(x)]\, e^x (e^x-3)}{y^2(x)}\,.$$

1. Determinare l'integrale generale.
2. Determinare l'unica soluzione y_1 della precedente equazione differenziale che soddisfa la condizione $y_1(\log 3) = -2$.
3. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} y_1(x)\,,$$

dove y_1 è la soluzione precedentemente trovata.

---

3. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\log\left[(1+4x^4)^{x^3}\right]}{1+4x^4}\, dx\,.$$

---

4. Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione

$$f(x) = \frac{[-\sin x + \sinh x]^{1+\alpha^2/9}}{\tan^\alpha x + \log(x^2+1)}$$

ha ordine di infinitesimo pari a 3 , per $x \to 0^+$.

---

5. Sia $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1((0,1])$, positiva, infinita per $x \to 0^+$, tale che $f(1) = 1$ e $f'(x) < 0$ in $(0,1]$. Dimostrare che f è invertibile e che la funzione inversa $g := f^{-1}$ è definita in $[1,+\infty)$ e soddisfa le seguenti proprietà: $g(1) = 1$, g è infinitesima per $x \to +\infty$, $g \in \mathcal{C}^1([1,+\infty))$ e

$$\int_0^1 \frac{xf(x)}{g'(f(x))}\, dx \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} y\, g(y)\, dy \quad \text{converge}\,.$$

Dimostrare, inoltre, che

$$xf(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{per} \quad x \to 0^+ \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(y) \sim \frac{1}{y^{1/(\alpha+1)}} \quad \text{per} \quad y \to +\infty\,.$$

---

6. Determinare l'insieme di definizione della funzione definita da

$$f(x,y) = \sqrt{-7|2x+y| + 4x^2 + y^2 + 4xy}\,.$$

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 16 gennaio 2009	**TEMA C** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I <u>NON</u> devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Determinare per quali valori del parametro reale α la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{5n})^{-2-\alpha}(\sqrt{1+3\mathrm{e}^{-5n}}-1)^{\alpha^2-1}}{\sin(\mathrm{e}^{-5n})}$$

converge.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{[3+y^5(x)]2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-2)}{y^4(x)}\,.$$

1. Determinare l'integrale generale.
2. Determinare l'unica soluzione y_1 della precedente equazione differenziale che soddisfa la condizione $y_1(\log 2) = -2$.
3. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} y_1(x)\,,$$

dove y_1 è la soluzione precedentemente trovata.

---

3. Calcolare

$$\int_0^2 \frac{\log[(1+x^3)^{2x^2}]}{1+x^3}\,dx\,.$$

---

4. Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione

$$f(x) = \frac{[-\sin(2x)+2\sinh x]^{3\alpha^2+1}}{\tan x + [\log(x^4+1)]^\alpha}$$

ha ordine di infinitesimo pari a 3 , per $x \to 0^+$.

---

5. Sia $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1((0,1])$, positiva, infinita per $x\to0^+$, tale che $f(1)=1$ e $f'(x)<0$ in $(0,1]$. Dimostrare che f è invertibile e che la funzione inversa $g := f^{-1}$ è definita in $[1,+\infty)$ e soddisfa le seguenti proprietà: $g(1)=1$, g è infinitesima per $x\to+\infty$, $g\in\mathcal{C}^1([1,+\infty))$ e

$$\int_0^1 \frac{xf(x)}{g'(f(x))}\,dx < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} y\,g(y)\,dy < +\infty\,.$$

Dimostrare, inoltre, che

$$xf(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{per} \quad x\to0^+ \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(y)\sim\frac{1}{y^{1/(\alpha+1)}} \quad \text{per} \quad y\to+\infty\,.$$

---

6. Determinare l'insieme di definizione della funzione definita da

$$f(x,y) = \sqrt{-7|2x+y|+4x^2+y^2+4xy}\,.$$

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 16 gennaio 2009	**TEMA D** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Determinare per quali valori del parametro reale α la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{4n}+2)^{2-3\alpha}}{(\mathrm{e}^{4n})^2\,[\log(\mathrm{e}^{-4n}+1)]^{\alpha^2}}$$

converge.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{x^3(1+\mathrm{e}^{-y(x)})}{(1+x^4)\mathrm{e}^{-y(x)}}\,.$$

1. Determinare l'integrale generale.
2. Determinare l'unica soluzione y_1 della precedente equazione differenziale che soddisfa la condizione $y_1(0)=0$.
3. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}[-y_1(x)]\,,$$

dove y_1 è la soluzione precedentemente trovata.

---

3. Calcolare

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{e}^{[3\log^2 x+\log(\log x)]}}{x}\,dx\,.$$

---

4. Stabilire per quali valori di $\alpha>0$ la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x+(1-\cos x)^{\alpha/2}}{|\log(1+x)+1-\mathrm{e}^x|^{2\alpha^2-1}}$$

ha ordine di infinitesimo pari a 2 , per $x\to0^+$.

---

5. Sia $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1([1,+\infty))$, positiva, infinitesima per $x\to+\infty$, tale che $f(1)=1$ e $f'(x)<0$ in $[1,+\infty)$. Dimostrare che f è invertibile e che la funzione inversa $g:=f^{-1}$ è definita in $(0,1]$ e soddisfa le seguenti proprietà: $g(1)=1$, g ha un asintoto verticale per $x\to0^+$, $g\in\mathcal{C}^1((0,1])$ e

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx<+\infty \qquad\Longleftrightarrow\qquad \int_0^1 \frac{y}{f'(g(y))}\,dy<+\infty\,.$$

Dimostrare, inoltre, che

$$f(x)\sim\frac{1}{x^\alpha}\quad\text{per}\quad x\to+\infty \qquad\Longleftrightarrow\qquad g(y)\sim\frac{1}{y^{1/\alpha}}\quad\text{per}\quad y\to0^+\,.$$

---

6. Determinare l'insieme di definizione della funzione definita da

$$f(x,y)=\log(5|x+y|-x^2-y^2-2xy)\,.$$