SOLUZIONI COMPITO del 16/01/2009
ELETTRICA 5 CFU

Esercizio 1
Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine della funzioni $t \mapsto \sin t$, con $t = \mathrm{e}^{-2n}$, si ottiene:

$$a_n := \frac{[\sin(\mathrm{e}^{-2n})]^5}{\mathrm{e}^{2n}} \sim \frac{(\mathrm{e}^{-2n})^5}{\mathrm{e}^{2n}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{12n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,.$$

Quindi il termine generale è infinitesimo ed inoltre, applicando il criterio della radice alla serie $\sum \frac{1}{\mathrm{e}^{12n}}$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\mathrm{e}^{12n}}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{12}} < 1\,,$$

ovvero tale serie converge. Pertanto, la serie proposta converge per confronto asintotico.

Esercizio 2
L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come soluzione singolare $y(x) \equiv -1$. Per determinare le altre soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\begin{aligned} &\int \frac{y^2}{1+y^3}\,dy = \int (x-3)\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{3}\log|y^3(x)+1| = \frac{(x-3)^2}{2} + C \\ \Longrightarrow \qquad & y^3(x) = \tilde{C}\mathrm{e}^{3(x-3)^2/2} - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt[3]{\tilde{C}\mathrm{e}^{3(x-3)^2/2} - 1} \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che per $\tilde{C} = 0$ si riottiene la soluzione singolare $y(x) \equiv -1$.

Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$1 = y(3) = \sqrt[3]{\tilde{C} - 1} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{C} = 2\,.$$

Quindi la soluzione cercata è data da $y(x) = \sqrt[3]{2\mathrm{e}^{3(x-3)^2/2} - 1}$.

Esercizio 3
Effettuando la sostituzione $t = 1 + \mathrm{e}^{2x}$, da cui $t(0) = 2$, $t(\log 2) = 5$, $dt = 2\mathrm{e}^{2x}\,dx$, si ottiene

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\sin(1+\mathrm{e}^{2x})\,dx = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin t\,dt = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}\,.$$

Esercizio 4
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per le funzioni $t \mapsto \sin t$, con $t = 2x$, $x \mapsto \tan x$ e $x \mapsto \log(1+x)$, otteniamo

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(2x)}{3\tan x + \log(1+x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x}{3x+x} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x}{4x} = 1/2\,.$$