16 APRILE 2004 — SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1.

- L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare a coefficienti costanti; pertanto, utilizzando la formula risolutiva, otteniamo
$$y(x) = C\mathrm{e}^{\lambda x} + x\mathrm{e}^{\lambda x} \; .$$
- Imponiamo ora le condizioni richieste:
$$1 = y(0) = C \qquad \text{da cui} \qquad C = 1 \; ,$$
e
$$1 = y(1/\lambda) = \mathrm{e}(1 + 1/\lambda) \qquad \text{da cui} \qquad \lambda = \frac{\mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}} \; .$$

Esercizio 2. Passando in coordinate polari, otteniamo
$$\iint_D \cos^2(1 + x^2 + y^2)\; dx\; dy = \iint_{\tilde{D}} \cos^2(1 + \rho^2)\rho\; d\rho\; d\theta$$
dove $\tilde{D} = \{0 \le \rho \le \sqrt{\pi - 1}\,,\; \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4\}$. Pertanto,
$$\iint_{\tilde{D}} \cos^2(1 + \rho^2)\rho\; d\rho\; d\theta = \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi-1}} \cos^2(1 + \rho^2)\; d(1 + \rho^2)\right) = \frac{\pi}{8}(\pi - 1 - \sin 1 \cos 1) \; .$$

Esercizio 3.

- Ponendo $j = 0$, si ottiene
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k + 1)x^k \; ,$$
che ha come raggio di convergenza $R = 1/l$, dove
$$l = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{(k + 1)} = 1 \; .$$
Pertanto $R = 1$.
- Ponendo $x = \pm 1$, si ottiene che la serie diverge, poiché non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza (cioè il termine generale non è infinitesimo). Pertanto, l'insieme di convergenza puntuale e assoluta è l'intervallo $(-1, 1)$.
- Ricordando che
$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \; ,$$
si ottiene
$$a_k \frac{3(k + 1)^3}{(k + 2)k!} = \frac{1}{k!} \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots \; ,$$
ovvero $a_k = (k + 2)/3(k + 1)^3$. Pertanto, ponendo $j = 1$, la serie proposta si riscrive nella forma
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k + 2}{3(k + 1)} x^k \; ,$$
che ha come raggio di convergenza $R = 1/l$, dove
$$l = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\frac{k + 2}{3(k + 1)}} = 1 \; .$$
Pertanto, si ha ancora $R = 1$.

Domanda 1. Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili, in cui $f(x) = 2 + x^2$ e $g(y) = 1/(2 + y^2)$. Poiché $f \in \mathcal{C}^0(I\!\!R)$ e $g \in \mathcal{C}^1(I\!\!R)$, possiamo applicare il Teorema di esistenza e unicità in piccolo, che garantisce l'esistenza di $\delta > 0$ e di un'unica funzione $y \in \mathcal{C}^1(1 - \delta, 1 + \delta)$ soluzione del problema assegnato.

Domanda 2. Ad esempio, possiamo considerare la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } (x, y) \neq (1, 1) \ , \\ 1 & \text{se } (x, y) = (1, 1) \ . \end{cases}$$

Infatti,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y) = 2 \neq 1 = f(1, 1) \ .$$

16 APRILE 2004 — SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1.

- L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare a coefficienti costanti; pertanto, utilizzando la formula risolutiva, otteniamo
$$y(x) = C\mathrm{e}^{(\lambda+1)x} - \mathrm{e}^{\lambda x} \ .$$
- Imponiamo ora le condizioni richieste:
$$-1 = y(0) = C - 1 \qquad \text{da cui} \qquad C = 0 \ ,$$
e
$$-1 = y(\lambda) = -\mathrm{e}^{\lambda^2} \qquad \text{da cui} \qquad \lambda^2 = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \lambda = 0 \ .$$

Esercizio 2. Passando in coordinate polari, otteniamo
$$\iint_D \sin^2(2 + x^2 + y^2)\ dx\ dy = \iint_{\tilde{D}} \sin^2(2 + \rho^2)\rho\ d\rho\ d\theta$$
dove $\tilde{D} = \{0 \le \rho \le \sqrt{\pi - 2}\,,\ 5\pi/4 \le \theta \le 7\pi/4\}$. Pertanto,
$$\iint_{\tilde{D}} \sin^2(2 + \rho^2)\rho\ d\rho\ d\theta = \left(\int_{5\pi/4}^{7\pi/4} d\theta\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi-2}} \sin^2(2 + \rho^2)\ d(2 + \rho^2)\right) = \frac{\pi}{8}(\pi - 2 + \sin 2 \cos 2) \ .$$

Esercizio 3.

- Ponendo $j = 0$, si ottiene
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k \ ,$$
che ha come raggio di convergenza $R = 1/l$, dove
$$l = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1 \ .$$
Pertanto $R = 1$.
- Ponendo $x = 1$, si ottiene che la serie diverge, poiché coincide con la serie armonica. Ponendo $x = -1$, si ottiene che la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) per il criterio di Leibniz; infatti la serie proposta si riscrive nella forma
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \ ,$$
che è a segni alterni, con il termine generale $1/k$ infinitesimo e monotono decrescente. Pertanto l'insieme di convergenza puntuale è $[-1, 1)$, mentre l'insieme di convergenza assoluta è $(-1, 1)$.
- Ricordando che
$$\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \ ,$$
si ottiene
$$a_k \frac{(2k+1)}{k^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \forall k = 0, 1, 2, \dots \ ,$$
ovvero $a_k = (-1)^{k+1} k/(2k + 1)$. Pertanto, ponendo $j = 1$, la serie proposta si riscrive nella forma
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(2k+1)} x^k \ ,$$
che ha come raggio di convergenza $R = 1/l$, dove
$$l = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k(2k+1)}} = 1 \ .$$
Pertanto $R = 1$.

Domanda 1. Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili, in cui $f(x) = x^2 - 3$ e $g(y) = 1/(1 + y^4)$. Poiché $f \in \mathcal{C}^0(I\!R)$ e $g \in \mathcal{C}^1(I\!R)$, possiamo applicare il Teorema di esistenza e unicità in piccolo, che garantisce l'esistenza di $\delta > 0$ e di un'unica funzione $y \in \mathcal{C}^1(1 - \delta, 1 + \delta)$ soluzione del problema assegnato.

Domanda 2. Ad esempio, possiamo considerare la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{se } (x,y) \neq (-1,-1) \ , \\ 1 & \text{se } (x,y) = (-1,-1) \ . \end{cases}$$

Infatti,

$$\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} f(x,y) = -2 \neq 1 = f(-1,-1) \ .$$