SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

1. $C.E. = (-1, +\infty)$.
2. Svolgendo semplici calcoli si ottiene:
$$f'(x) = -\frac{\log^3(x+1)}{2\sqrt{x+1}}\left[\log(x+1)+8\right] .$$
Quindi $x = -1 + \mathrm{e}^{-8}$ è punto di minimo e $x = 0$ è punto di massimo assoluto.
3. Poiché
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\lim_{x\to -1^+} \frac{\log^4\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\left(1/\sqrt{x+1}\right)} = 0^- \;,$$
la funzione è prolungabile in $x = -1$.

Esercizio 2

Ponendo $w = 2z - i$, l'equazione proposta diventa $w^4 = 16$, da cui
$$w = \sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{i0} = 2\,, \\ 2\mathrm{e}^{i\pi/2} = 2i\,, \\ 2\mathrm{e}^{i\pi} = -2\,, \\ 2\mathrm{e}^{i3\pi/2} = -2i\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad z = \begin{cases} (2+i)/2\,, \\ 3i/2\,, \\ (-2+i)/2\,, \\ -i/2\,. \end{cases}$$

Esercizio 3

I punti stazionari per f in $\mathbb{R}^2$ sono dati dalle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3y - 10xy = 0\,, \\ f_y(x,y) = 3x + 12y - 5x^2 = 0\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{array}{l} (x,y) = (0,0)\,, \\ (x,y) = (3/5,0)\,, \\ (x,y) = (3/10,-3/80)\,. \end{array}$$
Calcolando la matrice Hessiana in tali punti, si ricava
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}\,,$$
$$Hf(3/5,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}\,,$$
$$Hf(3/10,-3/80) = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di minimo}\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che f e g sono due iperboli equilatere che si intersecano nei punti ottenuti dalle soluzioni dell'equazione
$$\frac{1}{x} = \frac{5}{6} + \frac{1}{x-5} \qquad \text{che fornisce} \qquad x = 2\,,\ x = 3\,.$$
Pertanto l'area richiesta sarà data da
$$\int_2^3 \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x}\right)\, dx = \frac{5}{6} - 2\log(3/2)\,.$$

Esercizio 5

Osserviamo che
$$a_n := \frac{\sqrt{n}\sin(1/n)}{1+n^{2\alpha}} \sim \frac{\sqrt{n}\cdot 1/n}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n^{2\alpha+1/2}}\,.$$
Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie sarà convergente se e solo se $2\alpha + 1/2 > 1$, cioè $\alpha > 1/4$.

Esercizio 6

Se f avesse un asintoto verticale in $x = 2$, essa dovrebbe essere illimitata in un intorno di $x = 2$ e ciò non è possibile poiché, per il Teorema di Weierstrass, f, essendo continua su un intervallo chiuso e limitato, è necessariamente limitata.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

1. $C.E. = (-4, +\infty)$.
2. Svolgendo semplici calcoli si ottiene:
$$f'(x) = \frac{\log(x+4)}{2\sqrt{x+4}}[\log(x+4)+4] \ .$$
Quindi $x = -4 + e^{-4}$ è punto di massimo e $x = -3$ è punto di minimo assoluto.
3. Poiché
$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} \frac{\log^2\left(\frac{1}{x+4}\right)}{\left(1/\sqrt{x+4}\right)} = 0^+ \ ,$$
la funzione è prolungabile in $x = -4$.

Esercizio 2

Ponendo $w = 3z - i$, l'equazione proposta diventa $w^3 = 8$, da cui
$$w = \sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2e^{i0} = 2\,, \\ 2e^{i2\pi/3} = -1 + i\sqrt{3}\,, \\ 2e^{i4\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad z = \begin{cases} (2+i)/3\,, \\ \big(-1 + i(1+\sqrt{3})\big)/3\,, \\ \big(-1 + i(1-\sqrt{3})\big)/3\,. \end{cases}$$

Esercizio 3

I punti stazionari per f in $\mathbb{R}^2$ sono dati dalle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} f_x(x,y) = 6xy + 5y = 0\,, \\ f_y(x,y) = 3x^2 - 12y + 5x = 0\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{aligned} &(x,y) = (0,0)\,, \\ &(x,y) = (-5/3, 0)\,, \\ &(x,y) = (-5/6, -25/72)\,. \end{aligned}$$
Calcolando la matrice Hessiana in tali punti, si ricava
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}\,,$$
$$Hf(-5/3,0) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}\,,$$
$$Hf(-5/6,-25/144) = \begin{pmatrix} -25/24 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di massimo}\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che f e g sono due iperboli equilatere che si intersecano nei punti ottenuti dalle soluzioni dell'equazione
$$\frac{1}{x} = \frac{4}{3} + \frac{1}{x-4} \qquad \text{che fornisce} \qquad x = 1\,,\ x = 3\,.$$
Pertanto l'area richiesta sarà data da
$$\int_1^3 \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}\right)\, dx = \frac{8}{3} - 2\log 3\,.$$

Esercizio 5

Osserviamo che
$$a_n := \frac{n\tan(1/n^\alpha)}{2+\sqrt{n}} \sim \frac{n\cdot 1/n^\alpha}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\alpha-1/2}}\,.$$
Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie sarà convergente se e solo se $\alpha - 1/2 > 1$, cioè $\alpha > 3/2$.

Esercizio 6

Se f avesse limite pari a $+\infty$ per $x \to -2$, essa dovrebbe essere illimitata in un intorno di $x = -2$ e ciò non è possibile poiché, per il Teorema di Weierstrass, f, essendo continua su un intervallo chiuso e limitato, è necessariamente limitata.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

1. $C.E. = (-3, +\infty)$.
2. Svolgendo semplici calcoli si ottiene:

$$f'(x) = \frac{\log^5(x+3)}{2\sqrt{x+3}}[\log(x+3)+12] \ .$$

Quindi $x = -3 + \mathrm{e}^{-12}$ è punto di massimo e $x = -2$ è punto di minimo assoluto.

3. Poiché

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{\log^6\left(\frac{1}{x+3}\right)}{\left(1/\sqrt{x+3}\right)} = 0^+ \ ,$$

la funzione è prolungabile in $x = -3$.

Esercizio 2

Ponendo $w = z - 2i$, l'equazione proposta diventa $w^3 = -8$, da cui

$$w = \sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}\,, \\ 2\mathrm{e}^{i\pi} = -2\,, \\ 2\mathrm{e}^{i5\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad z = \begin{cases} 1 + i(2+\sqrt{3})\,, \\ -2 + 2i\,, \\ 1 + i(2-\sqrt{3})\,. \end{cases}$$

Esercizio 3

I punti stazionari per f in $\mathbb{R}^2$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -6xy - 5y = 0\,, \\ f_y(x,y) = -3x^2 + 12y - 5x = 0\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{array}{l} (x,y) = (0,0)\,, \\ (x,y) = (-5/3, 0)\,, \\ (x,y) = (-5/6, -25/144)\,. \end{array}$$

Calcolando la matrice Hessiana in tali punti, si ricava

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}\,,$$

$$Hf(-5/3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}\,,$$

$$Hf(-5/6,-25/144) = \begin{pmatrix} 25/24 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di minimo}\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che f e g sono due iperboli equilatere che si intersecano nei punti ottenuti dalle soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{4} + \frac{1}{x-6} \qquad \text{che fornisce} \qquad x = 2\,,\ x = 4\,.$$

Pertanto l'area richiesta sarà data da

$$\int_2^4 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x}\right)\, dx = \frac{3}{2} - 2\log 2\,.$$

Esercizio 5

Osserviamo che

$$a_n := \frac{n\tan(1/\sqrt{n})}{1+3n^{4\alpha}} \sim \frac{n\cdot 1/\sqrt{n}}{3n^{4\alpha}} = \frac{1}{3n^{4\alpha-1/2}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie sarà convergente se e solo se $4\alpha - 1/2 > 1$, cioè $\alpha > 3/8$.

Esercizio 6

Se f avesse limite pari a $-\infty$ per $x \to 1$, essa dovrebbe essere illimitata in un intorno di $x = 1$ e ciò non è possibile poiché, per il Teorema di Weierstrass, f, essendo continua su un intervallo chiuso e limitato, è necessariamente limitata.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

1. $C.E. = (-2, +\infty)$.
2. Svolgendo semplici calcoli si ottiene:
$$f'(x) = -\frac{\log(x+2)}{2\sqrt{x+2}}[\log(x+2)+4] \ .$$
Quindi $x = -2 + \mathrm{e}^{-4}$ è punto di minimo e $x = -1$ è punto di massimo assoluto.
3. Poiché
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\lim_{x\to -2^+} \frac{\log^2\left(\frac{1}{x+2}\right)}{\left(1/\sqrt{x+2}\right)} = 0^- \ ,$$
la funzione è prolungabile in $x = -2$.

Esercizio 2

Ponendo $w = 2z - 4i$, l'equazione proposta diventa $w^4 = -16$, da cui
$$w = \sqrt[4]{-16} = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}\,, \\ 2\mathrm{e}^{i3\pi/4} = (-1+i)/\sqrt{2}\,, \\ 2\mathrm{e}^{i5\pi/4} = (-1-i)/\sqrt{2}\,, \\ 2\mathrm{e}^{i7\pi/4} = (1-i)/\sqrt{2}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad z = \begin{cases} [\sqrt{2} + i(\sqrt{2}+4)]/2\,, \\ [-\sqrt{2} + i(\sqrt{2}+4)]/2\,, \\ [-\sqrt{2} + i(4-\sqrt{2})]/2\,, \\ [\sqrt{2} + i(4-\sqrt{2})]/2\,. \end{cases}$$

Esercizio 3

I punti stazionari per f in $\mathbb{R}^2$ sono dati dalle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} f_x(x,y) = -3y + 10xy = 0\,, \\ f_y(x,y) = -3x - 12y + 5x^2 = 0\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{array}{l} (x,y) = (0,0)\,, \\ (x,y) = (3/5, 0)\,, \\ (x,y) = (3/10, -3/80)\,. \end{array}$$
Calcolando la matrice Hessiana in tali punti, si ricava
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}\,,$$
$$Hf(3/5,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}\,,$$
$$Hf(3/10,-3/80) = \begin{pmatrix} -3/8 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di massimo}\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che f e g sono due iperboli equilatere che si intersecano nei punti ottenuti dalle soluzioni dell'equazione
$$\frac{1}{x} = \frac{7}{12} + \frac{1}{x-7} \qquad \text{che fornisce} \qquad x = 3\,,\ x = 4\,.$$
Pertanto l'area richiesta sarà data da
$$\int_3^4 \left(\frac{7}{12} + \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x}\right)\, dx = \frac{7}{12} - 2\log(4/3)\,.$$

Esercizio 5

Osserviamo che
$$a_n := \frac{\sqrt{n}\sin(1/2n^{3\alpha})}{3+2n} \sim \frac{\sqrt{n}\cdot 1/2n^{3\alpha}}{2n} = \frac{1}{4n^{3\alpha+1/2}}\,.$$
Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie sarà convergente se e solo se $3\alpha + 1/2 > 1$, cioè $\alpha > 1/6$.

Esercizio 6

Se f avesse un asintoto verticale in $x = 0$, essa dovrebbe essere illimitata in un intorno di $x = 0$ e ciò non è possibile poiché, per il Teorema di Weierstrass, f, essendo continua su un intervallo chiuso e limitato, è necessariamente limitata.