SOLUZIONI COMPITO del 17/02/2009
ANALISI 1 - MECCANICA + ELETTRICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che, moltiplicando numeratore e denominatore per $(2-i\sqrt{2})$, il numero proposto si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} z &= \frac{[i(1+\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)](2-i\sqrt{2})}{(2+i\sqrt{2})(2-i\sqrt{2})} \\ &= \frac{i(2+2\sqrt{2})+2\sqrt{2}-2+\sqrt{2}+2-i(2-\sqrt{2})}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{i\pi/4}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, in forma trigonometrica $z = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$ ed inoltre $z^{14} = \mathrm{e}^{i14\pi/4} = \mathrm{e}^{i3\pi/2} = -i$.

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. Se $\lambda = 0$, l'integrale generale sarà della forma $y(x) = C_1 + C_2 x + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4}$, che è infinitesima per $x \to +\infty$ solo se $C_1 = C_2 = 0$.

Per $\lambda \neq 0$, l'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\alpha^2 + \lambda\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\alpha = 0, -\lambda$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,.$$

Per $\lambda \neq 2$, la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{-2x}$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $4A - 2\lambda A = 1$, cioè $A = \frac{1}{4-2\lambda}$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{4-2\lambda}\mathrm{e}^{-2x}\,,$$

e quindi risulterà infinitesima se $\lambda \in (0,2) \cup (2,+\infty)$ e $C_1 = 0$, oppure se $\lambda \in (-\infty, 0)$ e $C_1 = C_2 = 0$.

Per $\lambda = 2$ la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-2x}$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $4Ax\mathrm{e}^{-2x} - 4A\mathrm{e}^{-2x} + 2A\mathrm{e}^{-2x} - 4Ax\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}$, cioè $A = -1/2$. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\,,$$

e quindi risulterà infinitesima se $C_1 = 0$.

Esercizio 3

Poiché f è continua nell'intervallo $(0,+\infty)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per stabilire se essa è impropriamente integrabile nell'intervallo proposto, è sufficiente controllarne solo il comportamento asintotico nell'origine e all'infinito.
Per $x \to +\infty$, si ottiene

$$f(x) = \frac{x^{2\alpha+3/2}\sqrt{1+x^{2\alpha^2}}}{\sqrt{1+x^5}} \sim \frac{x^{2\alpha+3/2}x^{\alpha^2}}{x^{5/2}} = \frac{1}{x^{1-2\alpha-\alpha^2}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto converge se e solo se $1 - 2\alpha - \alpha^2 > 1$, ovvero per $-2 < \alpha < 0$.
Per $x \to 0^+$, si ottiene

$$f(x) = \frac{x^{2\alpha+3/2}\sqrt{1+x^{2\alpha^2}}}{\sqrt{1+x^5}} \sim x^{2\alpha+3/2} = \frac{1}{x^{-2\alpha-3/2}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto converge se e solo se $-2\alpha - 3/2 < 1$, ovvero per $\alpha > -5/4$.
In conclusione, l'integrale proposto converge se e solo se $-5/4 < \alpha < 0$.

Esercizio 4
Osserviamo che la funzione proposta è ben definita in $D = (-\infty, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$. Osserviamo anche che la funzione può essere riscritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-2/(2x-1)} - 3 & \text{se } x > 1/2, \\ x - 3 & \text{se } x < 1/2. \end{cases}$$

Calcolando i limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \text{quindi non ci sono asintoti orizzontali;}$$
$$\lim_{x\to(1/2)^+} f(x) = \lim_{x\to(1/2)^+} \left[x\mathrm{e}^{-2/(2x-1)} - 3\right] = -3 \qquad \text{quindi non ci sono asintoti verticali;}$$
$$\lim_{x\to(1/2)^-} f(x) = \lim_{x\to(1/2)^-} [x-3] = -5/2 \qquad \text{quindi non ci sono asintoti verticali.}$$

Ovviamente la funzione proposta è essa stessa una retta per $x < 1/2$. Per determinare, invece, un eventuale asintoto obliquo a $+\infty$, procediamo come segue:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\mathrm{e}^{-2/(2x-1)} - 3/x\right] = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(\mathrm{e}^{-2/(2x-1)} - 1\right) - 3\right] = \lim_{x\to+\infty} -\left[\frac{2x}{2x-1} + 3\right] = -4\,.$$

Quindi la retta $y(x) = x - 4$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Infine, poiché il limite destro e sinistro in $x = 1/2$ esistono entrambi finiti, ma fra loro diversi, la funzione non può essere prolungata con continuità in tale punto.

Esercizio 5
Osserviamo che $f(x^3) - g(x^2) = x^6 + x^9 + o(x^9) - x^6 + o(x^6) = o(x^6)$; quindi l'affermazione 1) è falsa ed è sufficiente prendere $f(x) = x^2 + x^3$ e $g(x) = x^3 + x^4$ per contraddirla; infatti, in tal caso, si ottiene $f(x^3) - g(x^2) = -x^8 + x^9 \sim x^8$ per $x \to 0^+$. Invece, l'affermazione 2) è corretta, in quanto

$$f(1/\sqrt{n})g(1/\sqrt{n}) \sim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^{3/2}}\right)\frac{1}{n^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{5/2}}\,,$$

e quest'ultimo è il termine generale di una serie armonica generalizzata convergente. Quindi l'affermazione 2) segue dal criterio del confronto asintotico.

Esercizio 6
Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, quindi per stabilire la natura dei suoi punti critici, possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Cominciamo a determinare tali punti critici, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy + 3y^2 + 18 = 0; \\ f_y(x,y) = x^2 + 6xy = 0; \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0; \\ 3y^2 + 18 = 0; \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} y = -x/6; \\ -\dfrac{x^2}{4} + 18 = 0; \end{cases}$$

$$\text{il primo è impossibile, il secondo fornisce} \quad \begin{cases} y = -x/6; \\ x^2 = 72; \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm 6\sqrt{2}; \\ y = \mp\sqrt{2}. \end{cases}$$

Quindi gli unici punti stazionari sono dati da $P_1 = (6\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $P_2 = (-6\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Tenendo conto che $f_{xx}(x,y) = 2y$, $f_{xy}(x,y) = 2x + 6y$, $f_{yy}(x,y) = 6x$, si ricava che

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 36\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & -36\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

che hanno entrambe determinante negativo, quindi sono indefinite. Pertanto, entrambi i punti stazionari sono punti di sella.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che, moltiplicando numeratore e denominatore per $(\sqrt{2}-2i)$, il numero proposto si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} z &= \frac{[i(\sqrt{2}-1)+(1+\sqrt{2})](\sqrt{2}+2i)}{(\sqrt{2}+2i)(\sqrt{2}+2i)} \\ &= \frac{i(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}-2-i(2+2\sqrt{2})}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{-i\pi/4}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, in forma trigonometrica $z = \cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)$ ed inoltre $z^{14} = \mathrm{e}^{-i14\pi/4} = \mathrm{e}^{-i3\pi/2} = i$.

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. Se $\lambda = 0$, l'integrale generale sarà della forma $y(x) = C_1 + C_2 x + \mathrm{e}^x$, che è infinitesima per $x \to -\infty$ solo se $C_1 = C_2 = 0$.

Per $\lambda \neq 0$, l'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\alpha^2 + 3\lambda\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\alpha = 0, -3\lambda$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-3\lambda x}\,.$$

Per $\lambda \neq -1/3$, la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $A + 3\lambda A = 1$, cioè $A = \frac{1}{1+3\lambda}$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-3\lambda x} + \frac{1}{1+3\lambda}\mathrm{e}^x\,,$$

e quindi risulterà infinitesima se $\lambda \in (-\infty, -1/3) \cup (-1/3, 0)$ e $C_1 = 0$, oppure se $\lambda \in (0, +\infty)$ e $C_1 = C_2 = 0$.

Per $\lambda = -1/3$ la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^x$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $Ax\mathrm{e}^x + 2A\mathrm{e}^x - A\mathrm{e}^x - Ax\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$, cioè $A = 1$. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x\,,$$

e quindi risulterà infinitesima se $C_1 = 0$.

Esercizio 3

Poiché f è continua nell'intervallo $(0, +\infty)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per stabilire se essa è impropriamente integrabile nell'intervallo proposto, è sufficiente controllarne solo il comportamento asintotico nell'origine e all'infinito. Per $x \to +\infty$, si ottiene

$$f(x) = \frac{x^{1/2+\alpha}\sqrt{4+2x^2}}{\sqrt{3+x^{5+\alpha^2}}} \sim \frac{x^{1/2+\alpha}\sqrt{2}x}{x^{(5+\alpha^2)/2}} = \frac{\sqrt{2}}{x^{1-\alpha+\alpha^2/2}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto converge se e solo se $1 - \alpha + \alpha^2/2 > 1$, ovvero per $\alpha < 0$ e $\alpha > 2$.
Per $x \to 0^+$, si ottiene

$$f(x) = \frac{x^{1/2+\alpha}\sqrt{4+2x^2}}{\sqrt{3+x^{5+\alpha^2}}} \sim \frac{2x^{1/2+\alpha}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}x^{-1/2-\alpha}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto converge se e solo se $-1/2 - \alpha < 1$, ovvero per $\alpha > -3/2$.
In conclusione, l'integrale proposto converge se e solo se $-3/2 < \alpha < 0$ e $\alpha > 2$.

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione proposta è ben definita in $D = (-\infty, -1/3) \cup (-1/3, +\infty)$. Osserviamo anche che la funzione può essere riscritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} (x + 1/3)\mathrm{e}^{2/(3x+1)} & \text{se } x < -1/3, \\ x + 1/3 & \text{se } x > -1/3. \end{cases}$$

Calcolando i limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \text{quindi non ci sono asintoti orizzontali;}$$

$$\lim_{x\to(-1/3)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1/3)^-} (x + 1/3)\mathrm{e}^{2/(3x+1)} = 0 \qquad \text{quindi non ci sono asintoti verticali;}$$

$$\lim_{x\to(-1/3)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1/3)^+} [x + 1/3] = 0 \qquad \text{quindi non ci sono asintoti verticali.}$$

Ovviamente la funzione proposta è essa stessa una retta per $x > -1/3$. Per determinare, invece, un eventuale asintoto obliquo a $-\infty$, procediamo come segue:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x + 1/3)\mathrm{e}^{2/(3x+1)}}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} \left[x\left(\mathrm{e}^{2/(3x+1)} - 1\right) + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2/(3x+1)}\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{2x}{3x+1} + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2/(3x+1)}\right] = 1\,.$$

Quindi la retta $y(x) = x + 1$ è asintoto obliquo a $-\infty$. Infine, poiché il limite destro e sinistro in $x = -1/3$ esistono entrambi finiti e uguali fra loro, la funzione può essere prolungata con continuità in tale punto.

Esercizio 5

Osserviamo che $[f(x^2)-g(x^2)]/x^4 = [x^4+x^8+o(x^8)-x^4+o(x^4)]/x^4 = [o(x^4)]/x^4 = o(1)$; quindi l'affermazione 1) è corretta. Invece, l'affermazione 2) è errata, in quanto

$$f(1/\sqrt[4]{n})g(1/\sqrt[4]{n}) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}\,,$$

e quest'ultimo è il termine generale della serie armonica che non è convergente. Quindi l'affermazione 2) si può contraddire prendendo $f(x) = x^2 + x^4$ e $g(x) = x^2$, utilizzando il criterio del confronto asintotico.

Esercizio 6

Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, quindi per stabilire la natura dei suoi punti critici, possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Cominciamo a determinare tali punti critici, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -y^2 - 6xy = 0; \\ f_y(x,y) = 18 - 2xy - 3x^2 = 0; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 0; \\ 18 - 3x^2 = 0; \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} y = -6x; \\ -3x^2 + 12x^2 + 18 = 0; \end{cases}$$

$$\text{il secondo è impossibile, il primo fornisce} \quad \begin{cases} y = 0; \\ x^2 = 6; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{6}; \\ y = 0. \end{cases}$$

Quindi gli unici punti stazionari sono dati da $P_1 = (\sqrt{6}, 0)$ e $P_2 = (-\sqrt{6}, 0)$. Tenendo conto che $f_{xx}(x,y) = -6y$, $f_{xy}(x,y) = -6x - 2y$, $f_{yy}(x,y) = -2x$, si ricava che

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -6\sqrt{6} \\ -6\sqrt{6} & -2\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 6\sqrt{6} \\ 6\sqrt{6} & 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

che hanno entrambe determinante negativo, quindi sono indefinite. Pertanto, entrambi i punti stazionari sono punti di sella.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che, moltiplicando numeratore e denominatore per $(\sqrt{3}-3i)$, il numero proposto si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} z &= \frac{[i(2-2/\sqrt{3})+(2/\sqrt{3}+2)](\sqrt{3}-3i)}{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)} \\ &= \frac{i(2\sqrt{3}-2)+2+2\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}-i(2\sqrt{3}+6)}{12} = \frac{2}{3}-i\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, in forma trigonometrica $z = \frac{2\sqrt{2}}{3}[\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)]$ ed inoltre $\left(\frac{3z}{2\sqrt{2}}\right)^8 = \mathrm{e}^{-i8\pi/4} = \mathrm{e}^{-i2\pi} = 1$.

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. Se $\lambda = 0$, l'integrale generale sarà della forma $y(x) = C_1 + C_2x + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}$, che è infinitesima per $x \to +\infty$ solo se $C_1 = C_2 = 0$.

Per $\lambda \neq 0$, l'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\alpha^2 - 2\lambda\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\alpha = 0, 2\lambda$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{2\lambda x}\,.$$

Per $\lambda \neq 3/2$, la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{3x}$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $9A - 6\lambda A = 1$, cioè $A = \frac{1}{9-6\lambda}$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{2\lambda x} + \frac{1}{9-6\lambda}\mathrm{e}^{3x}\,,$$

e quindi risulterà infinitesima se $\lambda \in (0, 3/2) \cup (3/2, +\infty)$ e $C_1 = 0$, oppure se $\lambda \in (-\infty, 0)$ e $C_1 = C_2 = 0$.

Per $\lambda = 3/2$ la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{3x}$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $9Ax\mathrm{e}^{3x} + 6A\mathrm{e}^{3x} - 3A\mathrm{e}^{3x} - 9Ax\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}$, cioè $A = 1/3$. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{3x}\,,$$

e quindi risulterà infinitesima se $C_1 = 0$.

Esercizio 3

Poiché f è continua nell'intervallo $(0, +\infty)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per stabilire se essa è impropriamente integrabile nell'intervallo proposto, è sufficiente controllarne solo il comportamento asintotico nell'origine e all'infinito. Per $x \to +\infty$, si ottiene

$$f(x) = \frac{\sqrt{4+2x^{4+\alpha^2}}}{x^\alpha\sqrt{3+x^6}} \sim \frac{\sqrt{2}x^{2+\alpha^2/2}}{x^\alpha x^3} = \frac{\sqrt{2}}{x^{1+\alpha-\alpha^2/2}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto converge se e solo se $1+\alpha-\alpha^2/2 > 1$, ovvero per $0 < \alpha < 2$.
Per $x \to 0^+$, si ottiene

$$f(x) = \frac{\sqrt{4+2x^{4+\alpha^2}}}{x^\alpha\sqrt{3+x^6}} \sim \frac{2}{\sqrt{3}x^\alpha}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto converge se e solo se $\alpha < 1$.
In conclusione, l'integrale proposto converge se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione proposta è ben definita in $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Osserviamo anche che la funzione può essere riscritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x\mathrm{e}^{-2/x} & \text{se } x > 0, \\ 1 - x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Calcolando i limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty \qquad \text{quindi non ci sono asintoti orizzontali;}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[1 - x\mathrm{e}^{-2/x}\right] = 1 \qquad \text{quindi non ci sono asintoti verticali;}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} [1 - x] = 1 \qquad \text{quindi non ci sono asintoti verticali.}$$

Ovviamente la funzione proposta è essa stessa una retta per $x < 0$. Per determinare, invece, un eventuale asintoto obliquo a $+\infty$, procediamo come segue:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{x} - \mathrm{e}^{-2/x}\right] = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[1 - x\left(\mathrm{e}^{-2/x} - 1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[1 + \frac{2x}{x}\right] = 3\,.$$

Quindi la retta $y(x) = -x + 3$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Infine, poiché il limite destro e sinistro in $x = 0$ esistono entrambi finiti e sono uguali fra loro, la funzione può essere prolungata con continuità in tale punto.

Esercizio 5

Osserviamo che $[f(x^2) - g(x^2)]/x^4 = [x^4 + x^8 + o(x^8) - x^4 + o(x^4)]/x^4 = [o(x^4)]/x^4 = o(1)$; quindi l'affermazione 1) è corretta. Invece, l'affermazione 2) è errata, in quanto

$$f(1/\sqrt[4]{n})g(1/\sqrt[4]{n}) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}\,,$$

e quest'ultimo è il termine generale della serie armonica che non è convergente. Quindi l'affermazione 2) si può contraddire prendendo $f(x) = x^2 + x^4$ e $g(x) = x^2$, utilizzando il criterio del confronto asintotico.

Esercizio 6

Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, quindi per stabilire la natura dei suoi punti critici, possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Cominciamo a determinare tali punti critici, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -y^2 - 6xy = 0; \\ f_y(x,y) = 18 - 2xy - 3x^2 = 0; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 0; \\ 18 - 3x^2 = 0; \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} y = -6x; \\ -3x^2 + 12x^2 + 18 = 0; \end{cases}$$

il secondo è impossibile, il primo fornisce

$$\begin{cases} y = 0; \\ x^2 = 6; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{6}; \\ y = 0. \end{cases}$$

Quindi gli unici punti stazionari sono dati da $P_1 = (\sqrt{6}, 0)$ e $P_2 = (-\sqrt{6}, 0)$. Tenendo conto che $f_{xx}(x,y) = -6y$, $f_{xy}(x,y) = -6x - 2y$, $f_{yy}(x,y) = -2x$, si ricava che

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -6\sqrt{6} \\ -6\sqrt{6} & -2\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 6\sqrt{6} \\ 6\sqrt{6} & 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

che hanno entrambe determinante negativo, quindi sono indefinite. Pertanto, entrambi i punti stazionari sono punti di sella.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che, moltiplicando numeratore e denominatore per $(3-i\sqrt{3})$, il numero proposto si può riscrivere nella forma

$$z = \frac{[i(2/\sqrt{3}+2)+(2-2/\sqrt{3})](3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}$$
$$= \frac{i(2\sqrt{3}+6)+6-2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}-i(2\sqrt{3}-2)}{12} = \frac{2}{3}+i\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\,.$$

Pertanto, in forma trigonometrica $z = \frac{2\sqrt{2}}{3}[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]$ ed inoltre $\left(\frac{3z}{2\sqrt{2}}\right)^4 = \mathrm{e}^{i4\pi/4} = \mathrm{e}^{i\pi} = -1$.

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. Se $\lambda = 0$, l'integrale generale sarà della forma $y(x) = C_1 + C_2x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}$, che è infinitesima per $x \to +\infty$ solo se $C_1 = C_2 = 0$.

Per $\lambda \neq 0$, l'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\alpha^2 - 4\lambda\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\alpha = 0, 4\lambda$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{4\lambda x}\,.$$

Per $\lambda \neq -1/2$, la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{-2x}$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $4A + 8\lambda A = 1$, cioè $A = \frac{1}{4+8\lambda}$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{4\lambda x} + \frac{1}{4+8\lambda}\mathrm{e}^{-2x}\,,$$

e quindi risulterà infinitesima se $\lambda \in (-\infty, -1/2)\cup(-1/2, 0)$ e $C_1 = 0$, oppure se $\lambda \in (0, +\infty)$ e $C_1 = C_2 = 0$.

Per $\lambda = -1/2$ la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-2x}$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $4Ax\mathrm{e}^{-2x} - 4A\mathrm{e}^{-2x} + 2A\mathrm{e}^{-2x} - 4Ax\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}$, cioè $A = -1/2$. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\,,$$

e quindi risulterà infinitesima se $C_1 = 0$.

Esercizio 3

Poiché f è continua nell'intervallo $(0, +\infty)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per stabilire se essa è impropriamente integrabile nell'intervallo proposto, è sufficiente controllarne solo il comportamento asintotico nell'origine e all'infinito. Per $x \to +\infty$, si ottiene

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x^4}}{x^{3-\alpha}\sqrt{2+x^{5\alpha^2}}} \sim \frac{x^2}{x^{3-\alpha}x^{5\alpha^2/2}} = \frac{1}{x^{1-\alpha+5\alpha^2/2}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto converge se e solo se $1 - \alpha + 5\alpha^2/2 > 1$, ovvero per $\alpha < 0$ e $\alpha > 2/5$.
Per $x \to 0^+$, si ottiene

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x^4}}{x^{3-\alpha}\sqrt{2+x^{5\alpha^2}}} \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}x^{3-\alpha}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto converge se e solo se $3 - \alpha < 1$, ovvero per $\alpha > 2$.
In conclusione, l'integrale proposto converge se e solo se $\alpha > 2$.

Esercizio 4
Osserviamo che la funzione proposta è ben definita in $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Osserviamo anche che la funzione può essere riscritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{2/(2x-4)} + 2 & \text{se } x < 2, \\ x + 2 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Calcolando i limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, si ottiene

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \text{quindi non ci sono asintoti orizzontali;} \\ &\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left[x\mathrm{e}^{2/(2x-4)} + 2\right] = 2 \qquad \text{quindi non ci sono asintoti verticali;} \\ &\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} [x+2] = 4 \qquad \text{quindi non ci sono asintoti verticali.} \end{aligned}$$

Ovviamente la funzione proposta è essa stessa una retta per $x > 2$. Per determinare, invece, un eventuale asintoto obliquo a $-\infty$, procediamo come segue:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[\mathrm{e}^{2/(2x+4)} + 2/x\right] = 1 \\ &\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} \left[x\left(\mathrm{e}^{2/(2x-4)} - 1\right) + 2\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{2x}{2x-4} + 2\right] = 3\,. \end{aligned}$$

Quindi la retta $y(x) = x + 3$ è asintoto obliquo a $-\infty$. Infine, poiché il limite destro e sinistro in $x = 2$ esistono entrambi finiti, ma fra loro diversi, la funzione non può essere prolungata con continuità in tale punto.

Esercizio 5
Osserviamo che $f(x^3) - g(x^2) = x^6 + x^9 + o(x^9) - x^6 + o(x^6) = o(x^6)$; quindi l'affermazione 1) è falsa ed è sufficiente prendere $f(x) = x^2 + x^3$ e $g(x) = x^3 + x^4$ per contraddirla; infatti, in tal caso, si ottiene $f(x^3) - g(x^2) = -x^8 + x^9 \sim x^8$ per $x \to 0^+$. Invece, l'affermazione 2) è corretta, in quanto

$$f(1/\sqrt{n})g(1/\sqrt{n}) \sim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^{3/2}}\right)\frac{1}{n^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{5/2}}\,,$$

e quest'ultimo è il termine generale di una serie armonica generalizzata convergente. Quindi l'affermazione 2) segue dal criterio del confronto asintotico.

Esercizio 6
Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, quindi per stabilire la natura dei suoi punti critici, possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Cominciamo a determinare tali punti critici, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy + 3y^2 + 18 = 0; \\ f_y(x,y) = x^2 + 6xy = 0; \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0; \\ 3y^2 + 18 = 0; \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = -x/6; \\ -\dfrac{x^2}{4} + 18 = 0; \end{cases}$$

$$\text{il primo è impossibile, il secondo fornisce} \quad \begin{cases} y = -x/6; \\ x^2 = 72; \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm 6\sqrt{2}; \\ y = \mp\sqrt{2}. \end{cases}$$

Quindi gli unici punti stazionari sono dati da $P_1 = (6\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $P_2 = (-6\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Tenendo conto che $f_{xx}(x,y) = 2y$, $f_{xy}(x,y) = 2x + 6y$, $f_{yy}(x,y) = 6x$, si ricava che

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 36\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & -36\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

che hanno entrambe determinante negativo, quindi sono indefinite. Pertanto, entrambi i punti stazionari sono punti di sella.