SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

C.E. $= I\!R \setminus \{1\}$;

$f(x) > 0 \ \ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$; $\qquad f(x) < 0 \ \ \forall x \in (0,1)$; $\qquad f(0) = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$; $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\qquad \lim\limits_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$;

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}]}{3(\mathrm{e}^x - \mathrm{e})^2(\mathrm{e}^x - 1)^{2/3}} \ ;$$

posti $\alpha = 2\mathrm{e} - \sqrt{4\mathrm{e}^2 - 3\mathrm{e}} < 1$ e $\beta = 2\mathrm{e} + \sqrt{4\mathrm{e}^2 - 3\mathrm{e}} > \mathrm{e}$

$f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (-\infty, \log\alpha) \cup (\log\beta, +\infty)$; $\qquad f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (\log\alpha, \log\beta) \setminus \{0, 1\}$;

$f'(x) = 0 \quad x = \log\alpha, \log\beta$; $\qquad \lim\limits_{x\to 0^\pm} f'(x) = -\infty$.

La funzione assegnata non ha asintoti obliqui, il punto $x = \log\alpha$ è punto di massimo, il punto $x = \log\beta$ è punto di minimo. Il punto $x = 0$ è punto di flesso a tangente verticale. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, la retta $x = 1$ è asintoto verticale.

Esercizio 2

Ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta diviene $a^2 + b^2 - (a + ib)\sqrt{a^2 + b^2} + a + ib = 0$, ovvero

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2} + a = 0 \\ -\, b\sqrt{a^2 + b^2} + b = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} b = 0 \\ a^2 - a|a| + a = 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} b \neq 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \\ 1 = 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema ha come soluzioni $b = 0,\ a = 0$ oppure $b = 0,\ a = -1/2$; mentre il secondo sistema è impossibile. Le soluzioni cercate sono pertanto $z = 0$ e $z = -1/2$.

Esercizio 3

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt = \int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\sqrt{\mathrm{e}^{2t} + 1}\ dt = \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{2t} + 1\right]^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left[(\mathrm{e}^2 + 1)^{3/2} - (2)^{3/2}\right] .$$

Esercizio 4

Osservando che, posto $a_n = \left[\dfrac{n^2}{(\log n)^{1/2}}\right]^n$, per quanto visto sugli ordini di infinito, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$, si ottiene subito che il limite proposto risulta essere uguale a $+\infty$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

C.E. $= I\!R \setminus \{2\}$;

$f(x) < 0 \ \ \forall x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$; $\quad f(x) > 0 \ \ \forall x \in (1, 2)$; $\quad f(1) = 0$;

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$; $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\quad \lim_{x \to 2^\pm} f(x) = \mp\infty$;

$$f'(x) = -\frac{e^x[e^{2x} - 4e^2e^x + 3e^3]}{3(e^x - e^2)^2(e - e^x)^{2/3}} \ ;$$

posti $\alpha = 2e^2 - \sqrt{4e^4 - 3e^3} \in (1, e)$ e $\beta = 2e^2 + \sqrt{4e^4 - 3e^3} > e^2$

$f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (-\infty, \log\alpha) \cup (\log\beta, +\infty)$; $\quad f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (\log\alpha, \log\beta) \setminus \{1, 2\}$;

$f'(x) = 0 \quad x = \log\alpha, \log\beta$; $\quad \lim_{x \to 1^\pm} f'(x) = +\infty$.

La funzione assegnata non ha asintoti obliqui, il punto $x = \log\alpha$ è punto di minimo, il punto $x = \log\beta$ è punto di massimo. Il punto $x = 1$ è punto di flesso a tangente verticale. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, la retta $x = 2$ è asintoto verticale.

Esercizio 2

Ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta diviene $a^2 + b^2 + (a + ib)\sqrt{a^2 + b^2} - a - ib = 0$, ovvero

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2} - a = 0 \\ b\sqrt{a^2 + b^2} - b = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} b = 0 \\ a^2 + a|a| - a = 0 \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} b \neq 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \\ 1 = 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema ha come soluzioni $b = 0, \ a = 0$ oppure $b = 0, \ a = 1/2$, mentre il secondo sistema è impossibile. Le soluzioni cercate sono pertanto $z = 0$ e $z = 1/2$.

Esercizio 3

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \ dt = \int_0^1 e^t\sqrt{e^t + 1} \ dt = \frac{2}{3}\left[e^t + 1\right]^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left[(e + 1)^{3/2} - (2)^{3/2}\right] \ .$$

Esercizio 4

Osservando che, posto $a_n = \left[\frac{(\log n)^2}{n^{1/2}}\right]^n$, per quanto visto sugli ordini di infinito, $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0^+$, si ottiene subito che il limite proposto risulta essere uguale a 0^+.