Analisi I - 12 CFU (h. 2.30) ☐ ANALISI I (h. 2) I Mod. ☐ II Mod. ☐ Appello del 18 febbraio 2009	**TEMA/A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Informatica ☐ Automatica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame ed al corso di laurea di competenza.

Coloro che sostengono l'esame del Mod. I **NON** devono svolgere gli esercizi E4/E5/E6/D2, coloro che sostengono l'esame del Mod. II **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E2/E3/D1, coloro che sostengono l'esame da CFU 12 oppure 5+5 **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E5/D1.

E1. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh[2(x-1)]}{\log x^3} & \text{se } x > 1, \\ 3\log(x^2+1) + \alpha & \text{se } x \leq 1, \end{cases}$$

è continua in $x = 1$. Per i valori per cui non risulta continua, classificare il tipo di discontinuità.

E2. Studiare, al variare del parametro reale α , il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(1/n^2) - 1/n^2 + \alpha/n^6}{\pi/n^5} .$$

E3. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \log(1 - \sqrt{2x^2 - 1}) ,$$

determinare l'insieme di definizione D , i limiti alla frontiera e gli eventuali asintoti.

D1. Si consideri una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tale che $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un punto di minimo relativo con $f(x_0) < 0$, $f''(x_0) > 0$ ed, inoltre, in $(x_0, +\infty)$ la funzione f non ammette altri punti di minimo relativo. Stabilire, giustificando la risposta, quale delle seguenti affermazioni è l'unica esatta:

a) se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$, allora f ha almeno un punto di flesso in $(x_0, +\infty)$;
b) se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, allora f ha necessariamente un numero dispari di punti di flesso in $(x_0, +\infty)$;
c) nessuna delle precedenti affermazioni.

Fornire un controesempio per le affermazioni errate.

E4. Calcolare
$$\int_1^2 \frac{\log[(x^2+2x)^2]\sin[\log(x^2+2x)]}{2x^2+4x}(x+1)\, dx\,.$$

E5. Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[7]{x^6y^2} & \text{se } x>0, y<0; \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

E6. Si consideri l'equazione differenziale
$$y''(x) - 4y'(x) - 5 = \mathrm{e}^{-3x}\,.$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x}\,.$$

D2. Sia $H = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$ la matrice Hessiana di una funzione $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, in un punto assegnato P_0 . Stabilire quale delle seguenti affermazioni è l'unica corretta, giustificando la risposta corretta e commentando quelle errate:

a) P_0 è punto di minimo per f;
b) se P_0 è stazionario, può essere punto di minimo per f;
c) P_0 è punto di sella per f;
d) se P_0 è stazionario, è punto di sella per f.

Spazio riservato alla commissione	$E1.$	$E2.$	$E3.$	$D1.$	
	$E4.$	$E5.$	$E6.$	$D2.$	totale

Analisi I - 12 CFU (h. 2.30) ☐ ANALISI I (h. 2) I Mod. ☐ II Mod. ☐ Appello del 18 febbraio 2009	**TEMA/B** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Informatica ☐ Automatica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame ed al corso di laurea di competenza.

Coloro che sostengono l'esame del Mod. I **NON** devono svolgere gli esercizi E4/E5/E6/D2, coloro che sostengono l'esame del Mod. II **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E2/E3/D1, coloro che sostengono l'esame da CFU 12 oppure 5+5 **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E5/D1.

E1. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x^5 + \dfrac{\alpha+3}{\sqrt{x-2}} & \text{se } x > 2, \\ -32 & \text{se } x = 2, \\ \dfrac{[\mathrm{e}^{(x^2-4)} - 1]^2}{1 - \cosh(x-2)} & \text{se } x < 2, \end{cases}$$

è continua in $x = 2$. Per i valori per cui non risulta continua, classificare il tipo di discontinuità.

E2. Studiare, al variare del parametro reale α , il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^4}\right] \frac{n^3}{\mathrm{e}} .$$

E3. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \log(\sqrt{x^2 - 2} - 1) ,$$

determinare l'insieme di definizione D , i limiti alla frontiera e gli eventuali asintoti.

D1. Si consideri una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tale che $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un punto di minimo relativo con $f(x_0) < 0$, $f''(x_0) > 0$ ed, inoltre, in $(x_0, +\infty)$ la funzione f non ammette altri punti di minimo relativo. Stabilire, giustificando la risposta, quale delle seguenti affermazioni è l'unica esatta:

a) se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$, allora f ha necessariamente un numero pari di punti di flesso in $(x_0, +\infty)$;
b) se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, allora f ha almeno due punti di flesso in $(x_0, +\infty)$;
c) nessuna delle precedenti affermazioni.

Fornire un controesempio per le affermazioni errate.

E4. Calcolare

$$\int_0^{1/2} (3+4x)\left(\mathrm{e}^{3x+2x^2}\right)^2 \cos\left[\left(\mathrm{e}^{3x+2x^2}\right)^2\right]\, dx\,.$$

E5. Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt[4]{x^2y^3} & \text{se } x>0, y>0;\\ 0 & \text{altrove.}\end{cases}$$

E6. Si consideri l'equazione differenziale

$$3y''(x)+9y'(x)+4=27\mathrm{e}^{3x}\,.$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}\,.$$

D2. Sia $H=\begin{pmatrix}-9 & 6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$ la matrice Hessiana di una funzione $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, in un punto assegnato P_0. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è l'unica corretta, giustificando la risposta corretta e commentando quelle errate:

a) P_0 è punto di sella per f;	*b*) se P_0 è stazionario, è punto di sella per f;
c) P_0 è punto di massimo per f;	*d*) se P_0 è stazionario, può essere punto di massimo per f.

Spazio riservato alla commissione					
	*E*1.	*E*2.	*E*3.	*D*1.	
	*E*4.	*E*5.	*E*6.	*D*2.	totale

Analisi I - 12 CFU (h. 2.30) ☐ ANALISI I (h. 2) I Mod. ☐ II Mod. ☐ Appello del 18 febbraio 2009	**TEMA/C** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Informatica ☐ Automatica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame ed al corso di laurea di competenza.

Coloro che sostengono l'esame del Mod. I **NON** devono svolgere gli esercizi E4/E5/E6/D2, coloro che sostengono l'esame del Mod. II **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E2/E3/D1, coloro che sostengono l'esame da CFU 12 oppure 5+5 **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E5/D1.

E1. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin(3\pi x/2) + \dfrac{\alpha - 2}{x - 1} & \text{se } x > 1, \\ -2 & \text{se } x = 1, \\ \dfrac{\cos(x^2 - 1) - 1}{e^{(x-1)^2} - 1} & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

è continua in $x = 1$. Per i valori per cui non risulta continua, classificare il tipo di discontinuità.

E2. Studiare, al variare del parametro reale α , il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{n} - \log\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \right] \frac{n^{1/4}}{e} .$$

E3. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = x \log(\sqrt{3x^2 - 1} - 1) ,$$

determinare l'insieme di definizione D , i limiti alla frontiera e gli eventuali asintoti.

D1. Si consideri una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tale che $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un punto di minimo relativo con $f(x_0) < 0$, $f''(x_0) > 0$ ed, inoltre, in $(x_0, +\infty)$ la funzione f non ammette altri punti di minimo relativo. Stabilire, giustificando la risposta, quale delle seguenti affermazioni è l'unica esatta:

a) se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$, allora f ha necessariamente un numero pari di punti di flesso in $(x_0, +\infty)$;

b) se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, allora f ha almeno due punti di flesso in $(x_0, +\infty)$;

c) nessuna delle precedenti affermazioni.

Fornire un controesempio per le affermazioni errate.

E4. Calcolare

$$\int_0^1 (1+x)\left(e^{2x+x^2}\right)^3 \sin\left[\left(e^{2x+x^2}\right)^3\right]\,dx\,.$$

E5. Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt[6]{x^4y^3} & \text{se } x<0, y>0;\\ 0 & \text{altrove.}\end{cases}$$

E6. Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x)+4y'(x)+3=8e^{4x}\,.$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}\,.$$

D2. Sia $H=\begin{pmatrix}-9 & 6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$ la matrice Hessiana di una funzione $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, in un punto assegnato P_0 . Stabilire quale delle seguenti affermazioni è l'unica corretta, giustificando la risposta corretta e commentando quelle errate:

a) P_0 è punto di massimo per f; *b)* se P_0 è stazionario, è punto di sella per f;
c) P_0 è punto di sella per f; *d)* se P_0 è stazionario, può essere punto di massimo per f.

Spazio riservato alla commissione					
	$E1.$	$E2.$	$E3.$	$D1.$	
	$E4.$	$E5.$	$E6.$	$D2.$	totale

Analisi I - 12 CFU (h. 2.30) ☐ ANALISI I (h. 2) I Mod. ☐ II Mod. ☐ Appello del 18 febbraio 2009	**TEMA/D** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Informatica ☐ Automatica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame ed al corso di laurea di competenza.

Coloro che sostengono l'esame del Mod. I **NON** devono svolgere gli esercizi E4/E5/E6/D2, coloro che sostengono l'esame del Mod. II **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E2/E3/D1, coloro che sostengono l'esame da CFU 12 oppure 5+5 **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E5/D1.

E1. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log^2(x-1)}{\tanh[4(x-2)^2]} & \text{se } x > 2, \\ e^{x^2} + 2\alpha & \text{se } x \leq 2, \end{cases}$$

è continua in $x = 2$. Per i valori per cui non risulta continua, classificare il tipo di discontinuità.

E2. Studiare, al variare del parametro reale α , il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/\sqrt{n} + \alpha/n^{(3/2)} - \sin(1/\sqrt{n})}{2\pi/n} \, .$$

E3. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = x \log(1 - \sqrt{x^2 - 4}) \, ,$$

determinare l'insieme di definizione D , i limiti alla frontiera e gli eventuali asintoti.

D1. Si consideri una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tale che $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un punto di minimo relativo con $f(x_0) < 0$, $f''(x_0) > 0$ ed, inoltre, in $(x_0, +\infty)$ la funzione f non ammette altri punti di minimo relativo. Stabilire, giustificando la risposta, quale delle seguenti affermazioni è l'unica esatta:

a) se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$, allora f ha almeno un punto di flesso in $(x_0, +\infty)$;
b) se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, allora f ha necessariamente un numero dispari di punti di flesso in $(x_0, +\infty)$;
c) nessuna delle precedenti affermazioni.

Fornire un controesempio per le affermazioni errate.

E4. Calcolare

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\log[(4x+4x^2)^3]\cos[\log(4x+4x^2)]}{2x^2+2x}(1+2x)\ dx\,.$$

E5. Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[5]{x^2y^4} & \text{se } x<0, y<0; \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

E6. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - y'(x) - 2 = \mathrm{e}^{-2x}\,.$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x}\,.$$

D2. Sia $H = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$ la matrice Hessiana di una funzione $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, in un punto assegnato P_0 . Stabilire quale delle seguenti affermazioni è l'unica corretta, giustificando la risposta corretta e commentando quelle errate:

a) se P_0 è stazionario, è punto di sella per f;
b) P_0 è punto di minimo per f;
c) se P_0 è stazionario, può essere punto di minimo per f;
d) P_0 è punto di sella per f.

Spazio riservato alla commissione					
	$E1.$	$E2.$	$E3.$	$D1.$	
	$E4.$	$E5.$	$E6.$	$D2.$	totale