SOLUZIONI COMPITO del 18/02/2009
ANALISI 1 - INFORMATICA 12 CFU + AUTOMATICA 5+5 CFU
ANLISI 1 (I MODULO) - INFORMATICA + AUTOMATICA 5 CFU

TEMA A

Esercizio 1
Effettuando un cambiamento di variabile $t = x - 1$ ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per le funzioni $y \mapsto \sinh y$, con $y = 2t$, e $t \mapsto \log(1+t)$, otteniamo

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sinh(2t)}{\log(1+t)^3} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{3t} = 2/3\,, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3\log 2 + \alpha = f(1)\,.$$

Quindi la funzione f sarà continua se e solo se $3\log 2 + \alpha = 2/3$, ovvero $\alpha = 2/3 - \log 8$. Per tutti gli altri valori del parametro α, f presenta in $x = 1$ una discontinuità di salto.

Esercizio 2
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quinto ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$, con $x = 1/n^2$, otteniamo

$$\frac{\sin(1/n^2) - 1/n^2 + \alpha/n^6}{\pi/n^5} =: a_n \sim \frac{n^5}{\pi}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6} + \frac{1}{5!n^{10}} - \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{6n^6}\right).$$

Pertanto, si ricava $a_n \sim \dfrac{(\alpha - 1/6)n^5}{\pi n^6} = \dfrac{(\alpha-1/6)}{\pi n}$ per $\alpha \neq 1/6$, $\quad a_n \sim \dfrac{n^5}{5!\pi n^{10}} = \dfrac{1}{5!\pi n^5}$ per $\alpha = 1/6$. Nel primo caso, a_n è proporzionale al termine generale della serie armonica e quindi fornisce, per confronto asintotico, una serie divergente. Nel secondo caso a_n è proporzionale al termine generale della serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1 e quindi fornisce, per confronto asintotico, una serie convergente.

Esercizio 3
L'insieme di definizione della funzione assegnata è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0\,, \\ 1 - \sqrt{2x^2-1} > 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \leq -1\sqrt{2}\,, \quad x \geq 1/\sqrt{2}\,, \\ 2x^2 - 1 < 1\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \leq -1\sqrt{2}\,, \quad x \geq 1/\sqrt{2}\,, \\ -1 < x < 1\,. \end{cases}$$

Quindi $D = (-1, -1/\sqrt{2}] \cup [1/\sqrt{2}, 1)$. Poiché f è una funzione pari, ne studiamo i limiti alla frontiera solo in $[1/\sqrt{2}, 1)$ e nell'altro intervallo il risultato si ottiene per simmetria:

$$\lim_{x\to 1/\sqrt{2}^+} f(x) = f(1/\sqrt{2}) = 0,\ \text{non ci sono asintoti verticali;} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,\ x = 1 \text{ è asintoto verticale.}$$

Domanda 1
La risposta corretta è la a), infatti dalle ipotesi si ricava che f deve essere concava a $+\infty$, visto che tende all'asintoto orizzontale per difetto; tuttavia, essendo strettamente convessa in x_0, dove assume un minimo negativo, deve fare almeno un cambio di concavità, cioè deve avere almeno un punto di flesso. La risposta b), invece, è errata, poiché considerando, ad esempio, una funzione che dopo il minimo x_0 cresca fino ad un massimo positivo $x_1 > x_0$ e poi decresca fino a raggiungere asintoticamente l'asse x a $+\infty$, si ottiene che essa soddisfa tutte le ipotesi, ma ha due punti di flesso in $(x_0, +\infty)$, cioè un numero pari e non dispari di flessi.

Esercizio 4
Effettuando il cambiamento di variabile $t = \log(x^2 + 2x)$, da cui $\frac{2x+2}{x^2+2x}\,dx = dt$, $t(1) = \log 3$, $t(2) = \log 8$, e integrando poi per parti, si ottiene

$$\int_1^2 \frac{\log[(x^2+2x)^2]\sin[\log(x^2+2x)]}{2x^2+4x}(x+1)\,dx = \int_{\log 3}^{\log 8} \frac{t\sin t}{2}\,dt = \frac{1}{2}[-t\cos t + \sin t]\Big|_{\log 3}^{\log 8}$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\log 8\cos(\log 8) + \sin(\log 8) + \log 3\cos(\log 3) - \sin(\log 3)\right].$$

Esercizio 5
Ovviamente la funzione proposta è differenziabile (e quindi continua) in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$, tranne sui due semiassi $x = 0$ con ordinata negativa e $y = 0$ con ascissa positiva. Cominciamo a studiare i punti della forma $(x_0, 0)$ con $x_0 > 0$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0^-}} f(x,y) = 0 = f(x_0,0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua in tali punti.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_x(x_0, 0) = 0$, mentre

$$f_y(x_0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,t) - f(x_0,0)}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{0-0}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\sqrt[7]{x_0^6 t^2}}{t} = -\infty \end{cases}$$

quindi f non possiede il gradiente in tali punti e pertanto non è differenziabile.

Studiamo ora i punti della forma $(0, y_0)$ con $y_0 < 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to y_0}} f(x,y) = 0 = f(0,y_0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua in tali punti.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_y(0, y_0) = 0$, mentre

$$f_x(0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y_0) - f(0,y_0)}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sqrt[7]{t^6 y_0^2}}{t} = +\infty \\ \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{0-0}{t} = 0 \end{cases}$$

quindi f non possiede il gradiente in tali punti e pertanto non è differenziabile.

Studiamo infine l'origine $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^-}} f(x,y) = 0 = f(0,0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua nell'origine.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, inoltre

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\substack{h\to 0^+\\ k\to 0^-}} \dfrac{\sqrt[7]{h^6k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{\substack{r\to 0^+\\ -\pi/2<\theta<0}} \dfrac{r^{8/7}\sqrt[7]{\cos^6\theta\sin^2\theta}}{r} = 0\,, \\ \lim\limits_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ (h,k)\notin\ quarto\ quadrante}} \dfrac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,, \end{cases}$$

quindi f è differenziabile nell'origine.

Esercizio 6
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 - 4\lambda = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 0, 4$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{4x}\,.$$

Ricordando il principio di sovrapposizione e il metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = y_p^1(x) + y_p^2(x)$ dove $y_p^1(x) = Ax$ mentre $y_p^2(x) = B\mathrm{e}^{-3x}$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $-4A = 5$, cioè $A = -\frac{5}{4}$ e $9B + 12B = 1$, cioè $B = \frac{1}{21}$. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione completa è data da $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{4x} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{21}\mathrm{e}^{-3x}$.

Infine $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{C_1}{x} + \frac{C_2\mathrm{e}^{4x}}{x} - \frac{5}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{21\,x}\right] = \begin{cases} -5/4 & \text{se } C_2 = 0; \\ +\infty\cdot sign(C_2) & \text{se } C_2 \neq 0. \end{cases}$$

Domanda 2
È immediato osservare che la matrice H è semidefinita positiva, quindi P_0 può essere punto di minimo o punto di sella, qualora sia anche un punto stazionario, ma non è necessariamente un punto di sella. Inoltre, se il gradiente non si annulla in P_0, esso non è né un punto di minimo né una sella. Pertanto, l'unica risposta corretta è la b).

TEMA B

Esercizio 1

Effettuando un cambiamento di variabile $t = x - 2$ ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $y \mapsto e^y$, con $y = t(t + 4)$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cosh t$, otteniamo

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{t\to 0^-} \frac{[e^{t(t+4)} - 1]^2}{1 - \cosh t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t^2(t+4)^2}{-t^2/2} = -32 = f(2)\,, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -2^5 + \lim_{x\to 2^+} \frac{\alpha+3}{\sqrt{x-2}}\,.$$

Quindi la funzione f sarà continua se e solo se $\alpha = -3$. Per tutti gli altri valori del parametro α, f presenta in $x = 2$ una discontinuità di seconda specie.

Esercizio 2

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$, con $x = 1/n^2$, otteniamo

$$\left(\log\left[1 + \frac{1}{n^2}\right] - \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^4}\right)\frac{n^3}{e} =: a_n \sim \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{3n^6} - \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^4}\right)\frac{n^3}{e}\,.$$

Pertanto, si ricava $a_n \sim \dfrac{(\alpha - 1/2)n^3}{e\,n^4} = \dfrac{(\alpha - 1/2)}{e\,n}$ per $\alpha \neq 1/2$, $\quad a_n \sim \dfrac{n^3}{3e\,n^6} = \dfrac{1}{3e\,n^3}$ per $\alpha = 1/2$. Nel primo caso, a_n è proporzionale al termine generale della serie armonica e quindi fornisce, per confronto asintotico, una serie divergente. Nel secondo caso a_n è proporzionale al termine generale della serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1 e quindi fornisce, per confronto asintotico, una serie convergente.

Esercizio 3

L'insieme di definizione della funzione assegnata è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} x^2 - 2 \geq 0\,, \\ \sqrt{x^2 - 2} - 1 > 0\,, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x \leq -\sqrt{2}\,, \quad x \geq \sqrt{2}\,, \\ x^2 - 2 > 1\,, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x \leq -\sqrt{2}\,, \quad x \geq \sqrt{2}\,, \\ x < -\sqrt{3}\,, \quad x > \sqrt{3}\,. \end{cases}$$

Quindi $D = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Poiché f è una funzione pari, ne studiamo i limiti alla frontiera solo in $(\sqrt{3}, +\infty)$ e nell'altro intervallo il risultato si ottiene per simmetria:

$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = -\infty$, $x = \sqrt{3}$ è asintoto verticale; $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, non c'è asintoto orizzontale;

$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} (\log x)/x = 0$, non c'è asintoto obliquo.

Domanda 1

La risposta corretta è la b), infatti dalle ipotesi si ricava che f è strettamente convessa in x_0, dove assume un minimo negativo, e deve crescere fino ad un massimo positivo $x_1 > x_0$, visto che tende all'asintoto orizzontale per eccesso; inoltre, per la stessa ragione, f sarà convessa a $+\infty$. Pertanto, deve fare necessariamente due cambi di concavità, cioè deve avere almeno due punti di flesso, ovvero un numero pari di flessi. La risposta a), invece, è errata, poiché considerando, ad esempio, una funzione che dopo il minimo x_0 cresca fino a raggiungere asintoticamente l'asse x a $+\infty$, si ottiene che essa soddisfa tutte le ipotesi, ma ha un solo punto di flesso in $(x_0, +\infty)$, cioè un numero dispari e non pari di flessi.

Esercizio 4

Effettuando il cambiamento di variabile $t = e^{3x+2x^2}$, da cui $(3 + 4x)e^{3x+2x^2}\,dx = dt$, $t(0) = 1$, $t(1/2) = e^2$, si ottiene

$$\int_0^{1/2} (3 + 4x)\left(e^{3x+2x^2}\right)^2 \cos\left[\left(e^{3x+2x^2}\right)^2\right]\,dx = \int_1^{e^2} t\cos t^2\,dt = \frac{\sin t^2}{2}\bigg|_1^{e^2} = \frac{1}{2}\left[\sin(e^4) - \sin 1\right]\,.$$

Esercizio 5

Ovviamente la funzione proposta è differenziabile (e quindi continua) in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$, tranne sui due semiassi $x = 0$ con ordinata positiva e $y = 0$ con ascissa positiva. Cominciamo a studiare i punti della forma $(x_0, 0)$ con $x_0 > 0$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0^+}} f(x,y) = 0 = f(x_0,0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua in tali punti.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_x(x_0, 0) = 0$, mentre

$$f_y(x_0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,t) - f(x_0,0)}{t} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{t\to 0^-} \frac{0-0}{t} = 0 \\ \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{x_0^2 t^3}}{t} = +\infty \end{cases}$$

quindi f non possiede il gradiente in tali punti e pertanto non è differenziabile.

Studiamo ora i punti della forma $(0, y_0)$ con $y_0 > 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to y_0}} f(x,y) = 0 = f(0,y_0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua in tali punti.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_y(0, y_0) = 0$, mentre

$$f_x(0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y_0) - f(0,y_0)}{t} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{t^2 y_0^3}}{t} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{t\to 0^-} \frac{0-0}{t} = 0 \end{cases}$$

quindi f non possiede il gradiente in tali punti e pertanto non è differenziabile.

Studiamo infine l'origine $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} f(x,y) = 0 = f(0,0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua nell'origine.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, inoltre

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{h\to 0^+\\ k\to 0^+}} \frac{\sqrt[4]{h^2k^3}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{r\to 0^+\\ 0<\theta<\pi/2}} \frac{r^{5/4}\sqrt[4]{\cos^2\theta\sin^3\theta}}{r} = 0\,, \\ \displaystyle\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ (h,k)\notin \text{ primo quadrante}}} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,, \end{cases}$$

quindi f è differenziabile nell'origine.

Esercizio 6

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $3\lambda^2 + 9\lambda = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 0, -3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{-3x}\,.$$

Ricordando il principio di sovrapposizione e il metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = y_p^1(x) + y_p^2(x)$ dove $y_p^1(x) = Ax$ mentre $y_p^2(x) = Be^{3x}$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $9A = -4$, cioè $A = -\frac{4}{9}$ e $27B + 27B = 27$, cioè $B = \frac{1}{2}$. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione completa è data da $\quad y(x) = C_1 + C_2e^{-3x} - \frac{4}{9}x + \frac{1}{2}e^{3x}$.

Infine $\quad \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{C_1}{x} + \frac{C_2e^{-3x}}{x} - \frac{4}{9} + \frac{e^{3x}}{2\,x}\right] = \begin{cases} -4/9 & \text{se } C_2 = 0; \\ -\infty \cdot sign(C_2) & \text{se } C_2 \neq 0. \end{cases}$

Domanda 2

È immediato osservare che la matrice H è semidefinita negativa, quindi P_0 può essere punto di massimo o punto di sella, qualora sia anche un punto stazionario, ma non è necessariamente un punto di sella. Inoltre, se il gradiente non si annulla in P_0, esso non è né un punto di massimo né una sella. Pertanto, l'unica risposta corretta è la d).

TEMA C

Esercizio 1
Effettuando un cambiamento di variabile $t = x - 1$ ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $y \mapsto e^y$, con $y = t^2$, e quello al secondo ordine per la funzione $y \mapsto \cos y$, con $y = t(t+2)$, otteniamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{t\to 0^-} \frac{\cos(t(t+2)) - 1}{e^{t^2} - 1} = \lim_{t\to 0^-} -\frac{t^2(t+2)^2}{2t^2} = -2 = f(1)\,, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2 + \lim_{x\to 1^+} \frac{\alpha - 2}{x - 1}\,.$$

Quindi la funzione f sarà continua se e solo se $\alpha = 2$. Per tutti gli altri valori del parametro α, f presenta in $x = 1$ una discontinuità di seconda specie.

Esercizio 2
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$, con $x = 2/\sqrt{n}$, otteniamo

$$\left(\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{n} - \log\left[1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right]\right)\frac{n^{1/4}}{e} =: a_n \sim \left(\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} - \frac{8}{3n^{3/2}}\right)\frac{n^{1/4}}{e}\,.$$

Pertanto, si ricava $a_n \sim \dfrac{(\alpha+2)n^{1/4}}{e\,n} = \dfrac{(\alpha+2)}{e\,n^{3/4}}$ per $\alpha \neq -2$, $\quad a_n \sim -\dfrac{8n^{1/4}}{3e\,n^{3/2}} = -\dfrac{8}{3e\,n^{5/4}}$ per $\alpha = -2$. Nel primo caso, a_n è proporzionale al termine generale della serie armonica generalizzata di esponente minore di 1 e quindi fornisce, per confronto asintotico, una serie divergente. Nel secondo caso a_n è proporzionale al termine generale della serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1 e quindi fornisce, per confronto asintotico, una serie convergente.

Esercizio 3
L'insieme di definizione della funzione assegnata è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} 3x^2 - 1 \geq 0\,, \\ \sqrt{3x^2 - 1} - 1 > 0\,, \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq -1/\sqrt{3}\,, \quad x \geq 1/\sqrt{3}\,, \\ 3x^2 - 1 > 1\,, \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq -1/\sqrt{3}\,, \quad x \geq 1/\sqrt{3}\,, \\ x < -\sqrt{2/3}\,, \quad x > \sqrt{2/3}\,. \end{cases}$$

Quindi $D = (-\infty, -\sqrt{2/3}) \cup (\sqrt{2/3}, +\infty)$. Poiché f è una funzione dispari, ne studiamo i limiti alla frontiera solo in $(\sqrt{2/3}, +\infty)$ e nell'altro intervallo il risultato si ottiene per simmetria:

$$\lim_{x\to \sqrt{2/3}^+} f(x) = -\infty,\ x = \sqrt{2/3} \text{ è asintoto verticale;} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,\ \text{non c'è asintoto orizzontale;}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)/x = \lim_{x\to +\infty} \log(\sqrt{3x^2 - 1} - 1) = +\infty,\ \text{non c'è asintoto obliquo.}$$

Domanda 1
La risposta corretta è la b), infatti dalle ipotesi si ricava che f è strettamente convessa in x_0, dove assume un minimo negativo, e deve crescere fino ad un massimo positivo $x_1 > x_0$, visto che tende all'asintoto orizzontale per eccesso; inoltre, per la stessa ragione, f sarà convessa a $+\infty$. Pertanto, deve fare necessariamente due cambi di concavità, cioè deve avere almeno due punti di flesso, ovvero un numero pari di flessi. La risposta a), invece, è errata, poiché considerando, ad esempio, una funzione che dopo il minimo x_0 cresca fino a raggiungere asintoticamente l'asse x a $+\infty$, si ottiene che essa soddisfa tutte le ipotesi, ma ha un solo punto di flesso in $(x_0, +\infty)$, cioè un numero dispari e non pari di flessi.

Esercizio 4
Effettuando il cambiamento di variabile $t = e^{2x+x^2}$, da cui $(2+2x)e^{2x+x^2}\,dx = dt$, $t(0) = 1$, $t(1) = e^3$, si ottiene

$$\int_0^1 (1+x)\left(e^{2x+x^2}\right)^3 \sin\left[\left(e^{2x+x^2}\right)^3\right]\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^3} t^2 \sin t^3\,dt = -\frac{\cos t^3}{6}\Big|_1^{e^3} = \frac{1}{6}\left[\cos 1 - \cos(e^9)\right]\,.$$

Esercizio 5

Ovviamente la funzione proposta è differenziabile (e quindi continua) in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$, tranne sui due semiassi $x = 0$ con ordinata positiva e $y = 0$ con ascissa negativa. Cominciamo a studiare i punti della forma $(x_0, 0)$ con $x_0 < 0$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0^+}} f(x,y) = 0 = f(x_0,0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua in tali punti.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_x(x_0, 0) = 0$, mentre

$$f_y(x_0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,t) - f(x_0,0)}{t} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{t\to 0^-} \frac{0-0}{t} = 0 \\ \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt[6]{x_0^4 t^3}}{t} = +\infty \end{cases} \qquad \text{quindi } f \text{ non possiede il gradiente in tali punti e pertanto non è differenziabile.}$$

Studiamo ora i punti della forma $(0, y_0)$ con $y_0 > 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y\to y_0}} f(x,y) = 0 = f(0,y_0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua in tali punti.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_y(0, y_0) = 0$, mentre

$$f_x(0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y_0) - f(0,y_0)}{t} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{t\to 0^-} \frac{\sqrt[6]{t^4 y_0^3}}{t} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{0-0}{t} = 0 \end{cases} \qquad \text{quindi } f \text{ non possiede il gradiente in tali punti e pertanto non è differenziabile.}$$

Studiamo infine l'origine $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y\to 0^+}} f(x,y) = 0 = f(0,0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua nell'origine.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, inoltre

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{h\to 0^-\\ k\to 0^+}} \frac{\sqrt[6]{h^4k^3}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{r\to 0^+\\ \pi/2<\theta<\pi}} \frac{r^{7/6}\sqrt[6]{\cos^4\theta\sin^3\theta}}{r} = 0\,, \\ \displaystyle\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ (h,k)\notin \text{ secondo quadrante}}} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,, \end{cases} \qquad \text{quindi } f \text{ è differenziabile nell'origine.}$$

Esercizio 6

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $2\lambda^2 + 4\lambda = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 0, -2$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{-2x}\,.$$

Ricordando il principio di sovrapposizione e il metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = y_p^1(x) + y_p^2(x)$ dove $y_p^1(x) = Ax$ mentre $y_p^2(x) = Be^{4x}$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $4A = -3$, cioè $A = -\frac{3}{4}$ e $32B + 16B = 8$, cioè $B = \frac{1}{6}$. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione completa è data da $\quad y(x) = C_1 + C_2e^{-2x} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}e^{4x}\,.$

Infine $\qquad \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{C_1}{x} + \frac{C_2e^{-2x}}{x} - \frac{3}{4} + \frac{e^{4x}}{6\,x}\right] = \begin{cases} -3/4 & \text{se } C_2 = 0; \\ -\infty\cdot sign(C_2) & \text{se } C_2 \neq 0. \end{cases}$

Domanda 2

È immediato osservare che la matrice H è semidefinita negativa, quindi P_0 può essere punto di massimo o punto di sella, qualora sia anche un punto stazionario, ma non è necessariamente un punto di sella. Inoltre, se il gradiente non si annulla in P_0, esso non è né un punto di massimo né una sella. Pertanto, l'unica risposta corretta è la d).

TEMA D

Esercizio 1

Effettuando un cambiamento di variabile $t = x - 2$ ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per le funzioni $y \mapsto \tanh y$, con $y = 4t^2$, e $t \mapsto \log(1+t)$, otteniamo

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log^2(1+t)}{\tanh(4t^2)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{4t^2} = 1/4\,, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \mathrm{e}^4 + 2\alpha = f(2)\,.$$

Quindi la funzione f sarà continua se e solo se $\mathrm{e}^4 + 2\alpha = 1/4$, ovvero $\alpha = 1/8 - \mathrm{e}^4/2$. Per tutti gli altri valori del parametro α, f presenta in $x = 2$ una discontinuità di salto.

Esercizio 2

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quinto ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$, con $x = 1/\sqrt{n}$, otteniamo

$$\frac{1/\sqrt{n} + \alpha/n^{(3/2)} - \sin(1/\sqrt{n})}{2\pi/n} =: a_n \sim \frac{n}{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{n^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{6n^{3/2}} - \frac{1}{5!n^{5/2}}\right).$$

Pertanto, si ricava $a_n \sim \dfrac{(\alpha+1/6)n}{2\pi n^{3/2}} = \dfrac{(\alpha+1/6)}{2\pi\sqrt{n}}$ per $\alpha \neq -\frac{1}{6}$, $a_n \sim \dfrac{n}{5!2\pi n^{5/2}} = \dfrac{1}{5!2\pi n^{3/2}}$ per $\alpha = -\frac{1}{6}$. Nel primo caso, a_n è proporzionale al termine generale della serie armonica generalizzata di esponente minore di 1 e quindi fornisce, per confronto asintotico, una serie divergente. Nel secondo caso a_n è proporzionale al termine generale della serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1 e quindi fornisce, per confronto asintotico, una serie convergente.

Esercizio 3

L'insieme di definizione della funzione assegnata è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0\,, \\ 1 - \sqrt{x^2-4} > 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x \leq -2\,, \quad x \geq 2\,, \\ x^2 - 4 < 1\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x \leq -2\,, \quad x \geq 2\,, \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\,. \end{cases}$$

Quindi $D = (-\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5})$. Poiché f è una funzione dispari, ne studiamo i limiti alla frontiera solo in $[2, \sqrt{5})$ e nell'altro intervallo il risultato si ottiene per simmetria:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 0, \text{ non ci sono asintoti verticali;} \qquad \lim_{x\to \sqrt{5}^-} f(x) = -\infty,\ x = \sqrt{5} \text{ è asintoto verticale.}$$

Domanda 1

La risposta corretta è la *a*), infatti dalle ipotesi si ricava che f deve essere concava a $+\infty$, visto che tende all'asintoto orizzontale per difetto; tuttavia, essendo strettamente convessa in x_0, dove assume un minimo negativo, deve fare almeno un cambio di concavità, cioè deve avere almeno un punto di flesso. La risposta *b*), invece, è errata, poiché considerando, ad esempio, una funzione che dopo il minimo x_0 cresca fino ad un massimo positivo $x_1 > x_0$ e poi decresca fino a raggiungere asintoticamente l'asse x a $+\infty$, si ottiene che essa soddisfa tutte le ipotesi, ma ha due punti di flesso in $(x_0, +\infty)$, cioè un numero pari e non dispari di flessi.

Esercizio 4

Effettuando il cambiamento di variabile $t = \log(4x^2 + 4x)$, da cui $\frac{8x+4}{4x^2+4x}\,dx = dt$, $t(1/2) = \log 3$, $t(1) = \log 8$, e integrando poi per parti, si ottiene

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\log[(4x+4x^2)^3]\cos[\log(4x+4x^2)]}{2x^2+2x}(1+2x)\;dx = \int_{\log 3}^{\log 8} \frac{3t\cos t}{2}\,dt = \frac{3}{2}[t\sin t + \cos t]\Big|_{\log 3}^{\log 8}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\log 8 \sin(\log 8) + \cos(\log 8) - \log 3 \sin(\log 3) - \cos(\log 3)\right].$$

Esercizio 5

Ovviamente la funzione proposta è differenziabile (e quindi continua) in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$, tranne sui due semiassi $x = 0$ con ordinata negativa e $y = 0$ con ascissa negativa. Cominciamo a studiare i punti della forma $(x_0, 0)$ con $x_0 < 0$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0^-}} f(x,y) = 0 = f(x_0,0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua in tali punti.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_x(x_0, 0) = 0$, mentre

$$f_y(x_0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,t)-f(x_0,0)}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{0-0}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\sqrt[5]{x_0^2 t^4}}{t} = -\infty \end{cases}$$

quindi f non possiede il gradiente in tali punti e pertanto non è differenziabile.

Studiamo ora i punti della forma $(0, y_0)$ con $y_0 < 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y\to y_0}} f(x,y) = 0 = f(0,y_0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua in tali punti.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_y(0, y_0) = 0$, mentre

$$f_x(0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\sqrt[5]{t^2 y_0^4}}{t} = -\infty \\ \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{0-0}{t} = 0 \end{cases}$$

quindi f non possiede il gradiente in tali punti e pertanto non è differenziabile.

Studiamo infine l'origine $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y\to 0^-}} f(x,y) = 0 = f(0,0) \qquad \text{quindi } f \text{ è continua nell'origine.}$$

Osserviamo che, essendo f identicamente nulla sugli assi, si ottiene che $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, inoltre

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\substack{h\to 0^-\\ k\to 0^-}} \dfrac{\sqrt[5]{h^2k^4}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{\substack{r\to 0^+\\ -\pi/2<\theta<-\pi}} \dfrac{r^{6/5}\sqrt[5]{\cos^2\theta\sin^4\theta}}{r} = 0\,, \\ \lim\limits_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ (h,k)\not\in\ terzo\ quadrante}} \dfrac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,, \end{cases}$$

quindi f è differenziabile nell'origine.

Esercizio 6

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 - \lambda = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 0, 1$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 + C_2 e^x\,.$$

Ricordando il principio di sovrapposizione e il metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = y_p^1(x) + y_p^2(x)$ dove $y_p^1(x) = Ax$ mentre $y_p^2(x) = Be^{-2x}$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $-A = 2$, cioè $A = -2$ e $4B + 2B = 1$, cioè $B = \frac{1}{6}$. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione completa è data da $\quad y(x) = C_1 + C_2e^x - 2x + \frac{1}{6}e^{-2x}$.

Infine $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2e^x}{x} - 2 + \dfrac{e^{-2x}}{6\,x}\right] = \begin{cases} -2 & \text{se } C_2 = 0; \\ +\infty\cdot sign(C_2) & \text{se } C_2 \neq 0. \end{cases}$

Domanda 2

È immediato osservare che la matrice H è semidefinita positiva, quindi P_0 può essere punto di minimo o punto di sella, qualora sia anche un punto stazionario, ma non è necessariamente un punto di sella. Inoltre, se il gradiente non si annulla in P_0, esso non è né un punto di minimo né una sella. Pertanto, l'unica risposta corretta è la c).