SOLUZIONI

Esercizio 1

C.E. $= [0,1) \cup (1,4]$;

$f(x) > 0 \ \ \forall x \in (0,1) \cup (1,4)$; $\qquad f(x) = 0 \ \text{ per } \ x = 0, 4$;

$\lim_{x \to \pm 1} f(x) = +\infty$; $\qquad x = 1$ è asintoto verticale per f ;

$f'(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)}{(x-1)^2\sqrt{4x-x^2}} & \text{se } x \in (0,1) \ ; \\ -\frac{(x+2)}{(x-1)^2\sqrt{4x-x^2}} & \text{se } x \in (1,4) \ ; \end{cases}$ $\qquad f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (0,1)$; $\qquad f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (1,4)$;

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$; $\qquad \lim_{x \to 4^-} f'(x) = -\infty$.

Esercizio 2

Osserviamo che il limite proposto è un caso di indecisione 1^∞ e si può risolvere nel modo seguente:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n!+5}{n!}\right)^{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{5}{n!}\right)^{n!/5}\right]^5 = \mathrm{e}^5$$

dove l'ultimo limite è il noto limite notevole che fornisce il numero di Nepero.

Esercizio 3

Ricordando che $\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ e $\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, ed effettuando una sostituzione di variabile $t = \mathrm{e}^x$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^x \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right) dx &= \left(\int \frac{t^2+1}{t^2-1}\, dt\right)_{t=\mathrm{e}^x} = \left(\int \left[1 + \frac{2}{t^2-1}\right] dt\right)_{t=\mathrm{e}^x} \\ &= \left(t + \log\left[\frac{t-1}{t+1}\right]\right)_{t=\mathrm{e}^x} + C = \mathrm{e}^x + \log\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right) + C \ . \end{aligned}$$

Imponendo la condizione assegnata, si trova $C = -\mathrm{e}$; pertanto, la primitiva richiesta è

$$F(x) = \mathrm{e}^x + \log\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right) - \mathrm{e} \qquad \text{per} \quad x \in (0, +\infty) \ .$$

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che il punto $(2,1)$ è raggiunto in corrispondenza del parametro $t = 1$; inoltre,

$$\phi'(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{t-1} \\ \\ \frac{1}{t} + 1 \end{cases} .$$

Pertanto, il versore tangente a γ in $t = 1$ è $\vec{T}(1) = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.