SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Utilizzando la formula risolutiva per l'equazioni di secondo grado, valida anche in campo complesso, otteniamo:

$$z = \frac{-i + \sqrt{i^2 + i\sqrt{3}}}{2} = \frac{-i + \sqrt{-1 + i\sqrt{3}}}{2} = \frac{-i + \sqrt{2e^{2i\pi/3}}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{2}e^{i\pi/3}}{2}\,.$$

In forma algebrica, otteniamo:

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \qquad\qquad z_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\,.$$

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1, 2$. Pertanto, l'integrale generale sarà dato da

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}\,.$$

2. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ e la condizione al limite, si ottiene

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1\,, \\ C_2 = 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 1 \quad \text{e} \quad C_2 = 0\,.$$

Quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente alle condizione richieste ed è data da $y(x) = e^{-x}$.

Esercizio 3

Effettuando un cambiamento di variabile $t = \log(e^{3x} + 1)$, da cui $dt = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}\,dx$, $t(0) = \log 2$, $t(\log 2) = 9$, si ricava

$$\int_0^{\log 2} \frac{[\log(e^{3x} + 1)]^5}{e^{-3x}(e^{3x} + 1)}\,dx = \frac{1}{3}\int_{\log 2}^{9} t^5\,dt = \frac{t^6}{18}\Big|_{\log 2}^{9} = \frac{1}{18}\left(9^6 - \log^6 2\right)\,.$$

Esercizio 4

Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta, devo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} -1 \le \sqrt[3]{x^2 + y^2} \le 1\,, \\ 1 + 2x > 0\,, \\ \log(1 + 2x) \neq 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1\,, \\ x > -1/2\,, \\ 1 + 2x \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \neq 0\,. \end{cases}$$

Pertanto E sarà dato dalla porzione di semipiano a destra della retta verticale $x = -1/2$, contenuta nel cerchio di centro l'origine e raggio unitario (circonferenza inclusa), da cui va tolto il diametro che giace sull'asse y (cioè la retta $x = 0$) e tutto il segmento compreso tra i punti d'intersezione della retta $x = -1/2$ con la circonferenza.

1. E non è aperto, poiché contiene parte della circonferenza, che costituisce una porzione del suo bordo;
2. E non è chiuso, poiché non contiene le rette $x = -1/2$ e $x = 0$, che costituiscono una porzione del suo bordo;
3. E è ovviamente limitato, poiché, ad esempio, è contenuto nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2;
4. E non è connesso, poiché non è possibile collegare con una curva continua due punti dell'insieme che giacciano rispettivamente nel semipiano di sinistra e di destra rispetto all'asse y, senza attraversare la retta $x = 0$, che non appartiene all'insieme E.

Esercizio 5

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando la formula di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto e^t$, con $t = \sin(1/\sqrt{n})$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/\sqrt{n}$, si ottiene:

$$a_n := \frac{\exp[\sin(1/\sqrt{n})] - 1}{n} \sim \frac{\sin(1/\sqrt{n})}{n} \sim \frac{1/\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n^{3/2}} .$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, la serie proposta converge.

Esercizio 6

a) L'affermazione è errata poiché, essendo f differenziabile in $\mathbb{R}^2$, essa sarà anche continua in $\mathbb{R}^2$ e quindi esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) \in \mathbb{R}$.

b) L'affermazione è vera poiché f è differenziabile e quindi vale la formula del gradiente; pertanto, tenendo conto che il gradiente di f nel punto $(-1, 0)$ è nullo, $D_v f(-1, 0) = \nabla f(-1, 0) \cdot v = 0$.

c) L'affermazione è errata in quanto l'annullarsi del gradiente è condizione necessaria, ma non sufficiente, per l'estremalità. Ad esempio la funzione $f(x, y) = (x + 1)y$ ha il gradiente nullo nel punto $(-1, 0)$, che però risulta essere un punto di sella.

d) L'affermazione è vera poiché f è differenziabile e quindi essa ammette piano tangente in ogni punto; in particolare, nel punto $(-1, 0)$, l'equazione del piano tangente è data da $z = f(-1, 0)+\nabla f(-1, 0)\cdot(x, y) = 3$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

Utilizzando la formula risolutiva per l'equazioni di secondo grado, valida anche in campo complesso, otteniamo:

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 + i\sqrt{3}}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2\mathrm{e}^{i\pi/3}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/6}}{2}\,.$$

In forma algebrica, otteniamo:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad\qquad z_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -2, 3$. Pertanto, l'integrale generale sarà dato da

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{3x}\,.$$

2. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -2$ e la condizione al limite, si ottiene

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -2\,, \\ C_1 = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = -2\,.$$

Quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente alle condizione richieste ed è data da $y(x) = -2\mathrm{e}^{3x}$.

Esercizio 3

Effettuando un cambiamento di variabile $t = \sin(\frac{\pi}{2}\log x + \pi)$, da cui $dt = \frac{\pi}{2}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\log x+\pi)}{x}\,dx$, $t(1) = 0$, $t(\mathrm{e}) = -1$, si ricava

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\log x + \pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\log x + \pi\right)}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{-1} t^4\,dt = \frac{2}{5\pi}\,t^5\Big|_0^{-1} = -\frac{2}{5\pi}\,.$$

Esercizio 4

Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta, devo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 1 - 3y > 0\,, \\ -1 \le \sqrt[5]{x^2 + y^2} < 1\,, \\ x \neq 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y < 1/3\,, \\ x^2 + y^2 < 1\,, \\ x \neq 0\,. \end{cases}$$

Pertanto E sarà dato dalla porzione di semipiano al di sotto della retta orizzontale $y = 1/3$, contenuta nel cerchio di centro l'origine e raggio unitario (circonferenza esclusa), da cui va tolto il diametro che giace sull'asse y (cioè la retta $x = 0$) e tutto il segmento compreso tra i punti d'intersezione della retta $y = 1/3$ con la circonferenza.

1. E è aperto, poiché tutti i suoi punti sono interni;
2. E non è chiuso, poiché non contiene il suo bordo;
3. E è ovviamente limitato, poiché, ad esempio, è contenuto nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2;
4. E non è connesso, poiché non è possibile collegare con una curva continua due punti dell'insieme che giacciano rispettivamente nel semipiano di sinistra e di destra rispetto all'asse y, senza attraversare la retta $x = 0$, che non appartiene all'insieme E.

Esercizio 5

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando la formula di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \exp(1/n) - 1$, e per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = 1/n$, si ottiene:

$$a_n := \frac{1/\sqrt{n^3}}{\sin\left[\exp(1/n) - 1\right]} \sim \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2}}{\exp(1/n) - 1} \sim \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{1/2}} \,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente minore di 1, la serie proposta soddisfa la condizione necessaria, ma diverge.

Esercizio 6

a) L'affermazione è errata poiché, non essendo f necessariamente differenziabile in $(0, 0)$, essa può non avere il piano tangente in tale punto, pur avendo il gradiente. Ad esempio, scegliendo

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0; \\ 1 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

si ha che f è continua nel punto $(1, 1)$, $f(0, 0) = 0$ e $\nabla f(0, 0)$ è nullo, ma f non ammette piano tangente al grafico nell'origine, in quanto in tale punto essa non è differenziabile, non essendo neppure continua.

b) L'affermazione è errata poiché f è continua in $(1, 1)$ e quindi, per definizione, si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y) = f(1, 1) \in \mathbb{R} \,.$$

c) L'affermazione è errata in quanto l'esistenza del gradiente per una funzione di 2 variabili non implica la continuità. Ad esempio la funzione proposta al punto *a*), soddisfa tutte le ipotesi, ma come già osservato non è continua nell'origine.

d) L'affermazione è vera poiché $f(x, y) \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e $f(0, 0) = 0$; quindi si ottiene subito che $(0, 0)$ è punto di minimo assoluto per f su $\mathbb{R}^2$.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

Utilizzando la formula risolutiva per l'equazioni di secondo grado, valida anche in campo complesso, otteniamo:

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1 - i\sqrt{3}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{2\mathrm{e}^{-i\pi/3}}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/6}}{2} \,.$$

In forma algebrica, otteniamo:

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad\qquad z_2 = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2\sqrt{2}} \,.$$

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -3, 1$. Pertanto, l'integrale generale sarà dato da

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2\mathrm{e}^{x} \,.$$

2. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -1$ e la condizione al limite, si ottiene

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \,, \\ C_1 = 0 \,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = -1 \,.$$

Quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente alle condizione richieste ed è data da $y(x) = -\mathrm{e}^x$.

Esercizio 3

Effettuando un cambiamento di variabile $t = \cos(\pi \log x + \pi)$, da cui $dt = -\pi\frac{\sin(\pi\log x+\pi)}{x}\,dx$, $t(1) = -1$, $t(\sqrt{\mathrm{e}}) = 0$, si ricava

$$\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{\cos^3(\pi\log x + \pi)\,\sin(\pi\log x+\pi)}{x}\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} t^3\,dt = -\frac{1}{4\pi}\,t^4\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{4\pi} \,.$$

Esercizio 4

Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta, devo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 4y + 1 > 0 \,, \\ -1 \le \sqrt{x^2+y^2} < 1 \,, \\ y \neq 0 \,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y > -1/4 \,, \\ x^2 + y^2 < 1 \,, \\ y \neq 0 \,. \end{cases}$$

Pertanto E sarà dato dalla porzione di semipiano al di sopra della retta orizzontale $y = -1/4$, contenuta nel cerchio di centro l'origine e raggio unitario (circonferenza esclusa), da cui va tolto il diametro che giace sull'asse x (cioè la retta $y = 0$) e tutto il segmento compreso tra i punti d'intersezione della retta $y = -1/4$ con la circonferenza.

1. E è aperto, poiché tutti i suoi punti sono interni;
2. E non è chiuso, poiché non contiene il suo bordo;
3. E è ovviamente limitato, poiché, ad esempio, è contenuto nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2;
4. E non è connesso, poiché non è possibile collegare con una curva continua due punti dell'insieme che giacciano rispettivamente nel semipiano al di sopra e al di sotto dell'asse x, senza attraversare la retta $y = 0$, che non appartiene all'insieme E.

Esercizio 5

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando la formula di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \exp(1/\sqrt[4]{n}) - 1$, e per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = 1/\sqrt[4]{n}$, si ottiene:

$$a_n := \frac{1/n}{\sin\left[\exp(1/\sqrt[4]{n}) - 1\right]} \sim \frac{1/n}{\exp(1/\sqrt[4]{n}) - 1} \sim \frac{1/n}{1/\sqrt[4]{n}} = \frac{1}{n^{3/4}}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente minore di 1, la serie proposta soddisfa la condizione necessaria, ma diverge.

Esercizio 6

a) L'affermazione è vera poiché $f(x,y) \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e $f(0,0) = 0$; quindi si ottiene subito che $(0,0)$ è punto di minimo assoluto per f su $\mathbb{R}^2$.

b) L'affermazione è errata in quanto l'esistenza del gradiente per una funzione di 2 variabili non implica la continuità. Ad esempio la funzione proposta al punto *c*), soddisfa tutte le ipotesi, ma come già osservato non è continua nell'origine.

c) L'affermazione è errata poiché non essendo f necessariamente differenziabile in $(0,0)$, essa può non avere il piano tangente in tale punto, pur avendo il gradiente. Ad esempio, scegliendo

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0; \\ 1 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

si ha che f è continua nel punto $(1,1)$, $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0)$ è nullo, ma f non ammette piano tangente al grafico nell'origine, in quanto in tale punto essa non è differenziabile, non essendo neppure continua.

d) L'affermazione è errata poiché f è continua in $(1,1)$ e quindi, per definizione, si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = f(1,1) \in \mathbb{R}\,.$$

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

Utilizzando la formula risolutiva per l'equazioni di secondo grado, valida anche in campo complesso, otteniamo:

$$z = \frac{i + \sqrt{i^2 - i\sqrt{3}}}{2} = \frac{i + \sqrt{-1 - i\sqrt{3}}}{2} = \frac{i + \sqrt{2\mathrm{e}^{4i\pi/3}}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{2}\mathrm{e}^{2i\pi/3}}{2} .$$

In forma algebrica, otteniamo:

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad\qquad z_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} .$$

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -2, 1$. Pertanto, l'integrale generale sarà dato da
$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{x} .$$
2. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 2$ e la condizione al limite, si ottiene
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 , \\ \qquad C_2 = 0 , \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = 2 \quad \text{e} \quad C_2 = 0 .$$
Quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente alle condizione richieste ed è data da $y(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$.

Esercizio 3

Effettuando un cambiamento di variabile $t = \log(2+\mathrm{e}^{2x})$, da cui $dt = \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{2+\mathrm{e}^{2x}}\, dx$, $t(0) = \log 3$, $t\big(\frac{1}{2}\log(\mathrm{e}^2-2)\big) = 2$, si ricava

$$\int_0^{\frac{1}{2}\log(\mathrm{e}^2-2)} \mathrm{e}^{2x}\frac{[\log(2+\mathrm{e}^{2x})]^2}{(2+\mathrm{e}^{2x})}\, dx = \frac{1}{2}\int_{\log 3}^{2} t^2\, dt = \frac{t^3}{6}\bigg|_{\log 3}^{2} = \frac{1}{6}\left(8 - \log^3 3\right) .$$

Esercizio 4

Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta, devo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} -1 \le \sqrt[4]{x^2+y^2} \le 1 , \\ 1 - 4x > 0 , \\ \log(1-4x) \neq 0 , \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 , \\ x < 1/4 , \\ 1 - 4x \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \neq 0 . \end{cases}$$

Pertanto E sarà dato dalla porzione di semipiano a sinistra della retta verticale $x = 1/4$, contenuta nel cerchio di centro l'origine e raggio unitario (circonferenza inclusa), da cui va tolto il diametro che giace sull'asse y (cioè la retta $x = 0$) e tutto il segmento compreso tra i punti d'intersezione della retta $x = 1/4$ con la circonferenza.

1. E non è aperto, poiché contiene parte della circonferenza, che costituisce una porzione del suo bordo;
2. E non è chiuso, poiché non contiene le rette $x = 1/4$ e $x = 0$, che costituiscono una porzione del suo bordo;
3. E è ovviamente limitato, poiché, ad esempio, è contenuto nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2;
4. E non è connesso, poiché non è possibile collegare con una curva continua due punti dell'insieme che giacciano rispettivamente nel semipiano di sinistra e di destra rispetto all'asse y, senza attraversare la retta $x = 0$, che non appartiene all'insieme E.

Esercizio 5

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando la formula di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto e^t$, con $t = \sin(1/n)$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/n$, si ottiene:

$$a_n := \frac{\exp[\sin(1/n)] - 1}{\sqrt{n}} \sim \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}} \sim \frac{1/n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} .$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, la serie proposta converge.

Esercizio 6

a) L'affermazione è errata in quanto l'annullarsi del gradiente è condizione necessaria, ma non sufficiente, per l'estremalità. Ad esempio la funzione $f(x, y) = (x + 1)y$ ha il gradiente nullo nel punto $(-1, 0)$, che però risulta essere un punto di sella.

b) L'affermazione è vera poiché f è differenziabile e quindi vale la formula del gradiente. Pertanto, tenendo conto che il gradiente di f nel punto $(-1, 0)$ è nullo, $D_v f(-1, 0) = \nabla f(-1, 0) \cdot v = 0$.

c) L'affermazione è corretta poiché f è differenziabile, quindi essa ammette piano tangente in ogni punto; in particolare, nel punto $(-1, 0)$, l'equazione del piano tangente è data da $z = f(-1, 0) + \nabla f(-1, 0) \cdot (x, y) = 3$.

d) L'affermazione è errata poiché essendo, f differenziabile in $\mathbb{R}^2$, essa sarà anche continua in $\mathbb{R}^2$ e quindi esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) \in \mathbb{R}$.