## 19 SETTEMBRE 2002 — SOLUZIONI COMPITO A

**Esercizio 1.**

Posto $z = x + iy$, si ha

$$\begin{aligned}0 &= z - \overline{z} + 3\ \mathrm{Im}(z) - 1 - i\mathrm{Re}(z) = x + iy - x + iy + 3y - 1 - ix \\ &= (3y-1) + i(2y - x)\end{aligned}$$

da cui $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$. Pertanto l'unica soluzione è $z = \frac{1}{3}(2+i)$.

**Esercizio 2.**

$D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Si ha

$$\lim_{x\to 4^\pm} f(x) = \pm\infty$$

quindi $x = 4$ è asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 4, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 4x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2 - 3 - 4x(x-4)}{x-4} = 16,$$

quindi $y = 4(x+4)$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

**Esercizio 3.**

Il dominio di $f$ è $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > 0\}$. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(\log y + 1, \frac{x}{y}\right),$$

e quindi l'unico punto stazionario è $(0, \mathrm{e}^{-1})$.

**Esercizio 4.**

Osservando che $(6x^2+1)' = 12x$, si ottiene

$$\int \frac{5x}{6x^2+1}\, dx = \frac{5}{12} \int \frac{12x}{6x^2+1}\, dx = \frac{5}{12} \log(6x^2+1) + C\ .$$

**Esercizio 5.**

Applicando il criterio della radice, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{2n} + 2^{3n}}{10^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9^n\left(1 + \left(\frac{8}{9}\right)^n\right)}{10^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{10}\left(1 + \left(\frac{8}{9}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{9}{10} < 1\ ,$$

e quindi la serie converge.

**Esercizio 6.**

Si tratta di determinare, se esiste, $\alpha > 0$ tale che

$$\exists \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Per farlo utilizziamo il Teorema di de l'Hospital. Anzitutto $f(x) \to 0$ per $x \to 0^+$. Inoltre

$$\frac{f'(x)}{(x^\alpha)'} = \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} \left(\frac{x+1}{1+\sqrt{x}} - 2x \cdot \frac{x^2+1}{1+x}\right)$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} \left(\frac{x+1}{1+\sqrt{x}} - 2x \cdot \frac{x^2+1}{1+x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = 1 \iff \alpha = 1.$$

Pertanto le ipotesi del Teorema sono soddisfatte, e quindi

$$\exists \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Concludiamo che $f$ ha ordine di infinitesimo 1 per $x \to 0^+$.

**Esercizio 7.**

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 2 = 0$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(t) = C_1 \cos(\sqrt{2}t) + C_2 \sin(\sqrt{2}t) \ .$$

Una soluzione particolare (ottenibile per esempio con il metodo di somiglianza) è data da $y_p(t) = \frac{1}{3}e^t$. Quindi l'integrale generale dell'equazione completa diviene

$$y(t) = C_1 \cos(\sqrt{2}t) + C_2 \sin(\sqrt{2}t) + \frac{1}{3}e^t \ ,$$

ed imponendo le condizioni iniziali si ricava

$$y(t) = -\frac{1}{3}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) + \frac{1}{3}e^t \ .$$

**Domanda 1.**

Ad esempio $f(x) = x^2$. Infatti $x^2 \geq 0$ ed $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ per ogni $x \in I\!R$.

**Domanda 2.**

No. Infatti

$$\lim_{x \to 0} f(x, 1) = 1 \qquad \text{mentre} \quad f(0, 1) = 0.$$

**Domanda 3.**

L'affermazione è falsa: un contresempio è dato dalla successione $\{a_n\} = \{-3 + \frac{1}{n}\}$. Infatti $a_n > 3 \ \ \forall n \in I\!N$, ma $\lim a_n = -3$.

## 19 SETTEMBRE 2002 — SOLUZIONI COMPITO B

**Esercizio 1.**
Posto $z = x + iy$, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 - |z|^2 + 3i\mathrm{Re}(z) - i = x^2 - y^2 + 2ixy - x^2 - y^2 + 3ix - i \\ &= -2y^2 + i(2xy + 3x - 1) \end{aligned}$$

da cui $y = 0$, $x = \frac{1}{3}$. Pertanto l'unica soluzione è $z = \frac{1}{3}$.

**Esercizio 2.**
$D = I\!R \setminus \{-1\}$. Si ha

$$\lim_{x \to -1^\pm} f(x) = \pm\infty$$

quindi $x = -1$ è asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 + 2 - 3x^2 - 3x}{x+1} = -3,$$

quindi $y = 3(x-1)$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

**Esercizio 3.**
Il dominio di $f$ è $D = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ y \neq 0\}$. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left( \frac{2x}{y}, -\frac{x^2}{y^2} - 2y - 1 \right),$$

e quindi l'unico punto stazionario è $(0, -\frac{1}{2})$.

**Esercizio 4.**
Osservando che $(2x^2+3)' = 4x$, si ottiene

$$\int \frac{3x}{2x^2+3}\, dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x}{2x^2+3}\, dx = \frac{3}{4} \log(2x^2+3) + C\ .$$

**Esercizio 5.**
Applicando il criterio della radice, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{2^{2n} + 5^n}{6^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{5^n \left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}{6^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{6} \left( 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{5}{6} < 1\ ,$$

e quindi la serie converge.

**Esercizio 6.**
Si tratta di determinare $\alpha > 0$ tale che

$$\exists \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} \in I\!R \setminus \{0\}.$$

Per farlo utilizziamo il Teorema di de l'Hospital. Anzitutto $f(x) \to 0$ per $x \to 0^+$. Inoltre

$$\frac{f'(x)}{(x^\alpha)'} = \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} \left( \frac{2}{1+\sin x} - \frac{6x^2}{1+\sin(x^3)} \right)$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} \left( \frac{2}{1+\sin x} - \frac{6x^2}{1+\sin(x^3)} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\alpha x^{\alpha-1}} = 2 \iff \alpha = 1.$$

Pertanto le ipotesi del Teorema sono soddisfatte, e quindi

$$\exists \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

Concludiamo che $f$ ha ordine di infinitesimo 1 per $x \to 0^+$.

**Esercizio 7.**

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 3 = 0$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(t) = C_1 e^{t\sqrt{3}} + C_2 e^{-t\sqrt{3}} \ .$$

Una soluzione particolare (ottenibile per esempio con il metodo di somiglianza) è data da $y_p(t) = -\frac{1}{2}e^t$. Quindi l'integrale generale dell'equazione completa diviene

$$y(t) = C_1 e^{t\sqrt{3}} + C_2 e^{-t\sqrt{3}} - \frac{1}{2}e^t \ ,$$

ed imponendo le condizioni iniziali si ricava

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t.$$

**Domanda 1.**

Ad esempio $f(x) = 1 + \sin x$. Infatti $f(x) \geq 1 - 1 = 0$ ed $f(x + 2\pi) = f(x)$ per ogni $x \in I\!R$.

**Domanda 2.**

No. Infatti

$$\lim_{x\to 0} f(x,1) = 1 \qquad \text{mentre} \quad f(0,1) = 0.$$

**Domanda 3.**

L'affermazione è falsa: un contresempio è dato dalla successione $\{a_n\} = \{2 - \frac{1}{n}\}$. Infatti $a_n < 2 \ \ \forall n \in I\!N$, ma $\lim a_n = 2$.