SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1
Poiché la funzione proposta è non negativa e continua nell'intervallo $(0,+\infty)$, studiando il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ otteniamo

$$\text{per } x \to +\infty \quad f(x) \le \frac{1 \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\,(\mathrm{e}^x - 1)} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \quad \text{che è impropriamente integrabile;}$$

$$\text{per } x \to 0^+ \quad f(x) \sim \frac{x}{x^{1/2} \cdot x} = \frac{1}{x^{1/2}} \quad \text{che è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto la funzione proposta risulta impropriamente integrabile in $(0,+\infty)$.

Esercizio 2
Innanzitutto osserviamo che la funzione proposta, in quanto somma di potenze positive, è continua sull'insieme chiuso e limitato E. Pertanto, grazie al Teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Poiché l'insieme E può essere scritto sotto la forma di vincolo $E = \{g(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2 = 0\}$, introduciamo la Lagrangiana $L(x,y,\lambda)$ associata al problema proposto e data da

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 - 3y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y + \lambda(x^2 + 3y^2 - 2)\,.$$

Derivando, otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -6y + 2\sqrt{3} + 6\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 3y^2 - 2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3(1-\lambda)} \\ \dfrac{1}{(1+\lambda)^2} + \dfrac{9}{9(1-\lambda)^2} = 2 \end{cases}$$

che fornisce

$$2\lambda^2 + 2 = 2\lambda^4 - 4\lambda^2 + 2 \qquad \lambda \neq \pm 1\,,$$

da cui $\lambda = 0, \pm\sqrt{3}$. Sostituendo i valori del molitplicatore λ ottenuti nelle espressioni di x ed y, si ottengono i seguenti tre punti critici: $P_0 = (-1, 1/\sqrt{3})$, $P_1 = \big(-1/(1+\sqrt{3}), \sqrt{3}/3(1-\sqrt{3})\big)$ e $P_2 = \big(1/(\sqrt{3}-1), \sqrt{3}/3(1+\sqrt{3})\big)$. Confrontando i valori della funzione nei punti trovati, si ottiene che $f(P_0) = 0$, $f(P_1) = -3\sqrt{3}$ mentre $f(P_2) = 3\sqrt{3}$, quindi P_1 è punto di minimo assoluto per f in E e P_2 è punto di massimo assoluto per f in E.

Esercizio 3
Ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma

$$a^2 - b^2 + 2iab + a^2 + b^2 + 2a = 2b \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} 2a^2 + 2a = 2b \\ 2ab = 0\,. \end{cases}$$

Risolvendo la seconda equazione del sistema così ottenuto, si ricava

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ a(a+1) = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0 \;\text{ e }\; a = -1\,.$$

Pertanto, le soluzioni cercate sono $z = 0$ e $z = -1$.