SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 20/03/2018
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA + ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno qualsiasi; pertanto, cominciamo a studiarne la convergenza assoluta utilizzando, ad esempio, il criterio della radice. In tal caso otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{|2x^2-x^4|^n}{8^n n\log(n+1)}} \sim \sqrt[n]{\frac{|2x^2-x^4|^n}{8^n n\log n}} = \frac{|2x^2-x^4|}{8\sqrt[n]{n\log n}} \to \frac{|2x^2-x^4|}{8}\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$\sqrt[n]{n} \to 1\,, \qquad \sqrt[n]{\log n} \to 1\,.$$

Pertanto, la serie è assolutamente (e quindi anche semplicemente) convergente se $\frac{|2x^2-x^4|}{8} < 1$, ovvero per $-8 < x^4 - 2x^2 < 8$, che fornisce $-2 < x < 2$. La serie è, invece, assolutamente divergente per $x < -2$ e $x > 2$ e, come conseguenza del criterio della radice, si ottiene anche che il termine generale non è infinitesimo, per cui la serie non è neppure semplicemente convergente. Infine, per $x = \pm 2$, il criterio non fornisce alcuna informazione, ma sostituendo nel termine generale della serie otteniamo $a_n = (-1)^n \frac{1}{n\log(n+1)}$, che non converge assolutamente per il confronto con la serie di Abel di esponenti $p = q = 1$, ma converge semplicemente per il criterio di Leibniz, poiché è una serie a segno alterno, in cui la successione $\frac{1}{n\log(n+1)}$ è monotona decrescente, in quanto reciproco del prodotto di due successioni crescenti e positive.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere effettuando la sostituzione $z = \sin(\log t)$, da cui $dz = \frac{\cos(\log t)}{t}\,dt$, $z(\mathrm{e}^{\pi/4}) = \sqrt{2}/2$, $z(\mathrm{e}^{\pi/2}) = 1$. Quindi ricaviamo

$$\int_{\mathrm{e}^{\pi/4}}^{\mathrm{e}^{\pi/2}} \frac{\cos(\log t)}{t\sin^3(\log t)}\,dt = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{1}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2z^2}\Big|_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 3

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Quest'ultima ha per soluzione $\lambda = 2$ con molteplicità 2; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2 x\mathrm{e}^{2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^{2x}$, da cui $y_p'(x) = 2A\mathrm{e}^{2x}(x + x^2)$ e $y_p''(x) = 2A\mathrm{e}^{2x}(2x^2 + 4x + 1)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$2A\mathrm{e}^{2x}(2x^2+4x+1) + 2A\mathrm{e}^{2x}(-4x^2-4x) + 2A\mathrm{e}^{2x}(2x^2) = 4\mathrm{e}^{2x} \quad\Longrightarrow\quad 2A = 4 \quad\Longrightarrow\quad A = 2\,.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2 x\mathrm{e}^{2x} + 2x^2\mathrm{e}^{2x}$. Imponendo ora le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y(0) = C_1\,, \\ 1 = y'(0) = 2C_1 + C_2\,, \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} C_1 = 0\,, \\ C_2 = 1\,. \end{cases}$$

Concludendo, la soluzione del problema di Cauchy proposto è $y(x) = (x + 2x^2)\mathrm{e}^{2x}$.

Esercizio 4

Osserviamo che f è una funzione continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni continue ed è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0; \pm 1/2\}$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni derivabili. Inoltre, calcolando

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \mathrm{e}^{-4} = f(0)\,,$$

ricaviamo che f è continua anche nell'origine; pertanto, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
Passiamo ora allo studio della derivabilità. Innanzitutto, osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^3} + 2 & \text{se } \mathrm{e}^{-1/x^2} > \mathrm{e}^{-4}, \text{ ovvero per } x < -1/2 \text{ oppure } x > 1/2; \\ -\frac{2\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^3} + 2 & \text{se } \mathrm{e}^{-1/x^2} < \mathrm{e}^{-4}, \text{ ovvero per } -1/2 < x < 0 \text{ oppure } 0 < x < 1/2. \end{cases}$$

Calcolando

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{2\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^3} + 2 \right) = 2\,, \qquad \lim_{x \to -1/2^\pm} f'(x) = \pm 16\mathrm{e}^{-4} + 2\,, \qquad \lim_{x \to 1/2^\pm} f'(x) = \pm 16\mathrm{e}^{-4} + 2\,,$$

ricaviamo che f è derivabile nell'origine, mentre f' ha una salto nei punti $x = \pm 1/2$; pertanto $x = \pm 1/2$ sono punti angolosi. Osserviamo, infine, che nel primo limite abbiamo effettuato la sostituzione $t = 1/x^2$, da cui $x = 1/\sqrt{t}$, per $x > 0$, o $x = -1/\sqrt{t}$, per $x < 0$, ottenendo

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^3} = \lim_{t \to +\infty} \pm \frac{2t^{3/2}}{\mathrm{e}^t} = 0\,.$$

Esercizio 5

1) Per la definizione si veda il libro di testo.
2) Un possibile esempio è fornito dalla funzione $f(x) = |x - 2|$.
3) Un possibile esempio è fornito dalla funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ (punto di cuspide) oppure $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (punto di flesso a tangente verticale).
4) L'affermazione è corretta, in quanto una funzione derivabile in x_0 è necessariamente continua in x_0, mentre la presenza di un punto di salto significa la presenza di un discontinuità.
5) Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, possiamo scrivere $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$, da cui si ottiene

$$\begin{aligned} 2 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 3x}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) - 3x}{x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{f(0) + [f'(0) - 3]x + \frac{f''(0)}{2}x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{f(0) + [f'(0) - 3]x}{x^2} \right] + \frac{f''(0)}{2}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$ e $\frac{f''(0)}{2} = 2$; ovvero lo sviluppo di Mc Laurin richiesto è

$$f(x) = 3x + 2x^2 + o(x^2)\,, \qquad \text{per } \; x \to 0\,.$$

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno qualsiasi; pertanto, cominciamo a studiarne la convergenza assoluta utilizzando, ad esempio, il criterio della radice. In tal caso otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{|x^2-x^4|^n}{2^n(n+1)\log n}} \sim \sqrt[n]{\frac{|x^2-x^4|^n}{2^n n\log n}} = \frac{|x^2-x^4|}{2\sqrt[n]{n\log n}} \to \frac{|x^2-x^4|}{2}\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$\sqrt[n]{n} \to 1\,, \qquad \sqrt[n]{\log n} \to 1\,.$$

Pertanto, la serie è assolutamente (e quindi anche semplicemente) convergente se $\frac{|x^2-x^4|}{2} < 1$, ovvero per $-2 < x^4 - x^2 < 2$, che fornisce $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. La serie è, invece, assolutamente divergente per $x < -\sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2}$ e, come conseguenza del criterio della radice, si ottiene anche che il termine generale non è infinitesimo, per cui la serie non è neppure semplicemente convergente. Infine, per $x = \pm\sqrt{2}$, il criterio non fornisce alcuna informazione, ma sostituendo nel termine generale della serie otteniamo $a_n = (-1)^n \frac{1}{(n+1)\log n}$, che non converge assolutamente per il confronto con la serie di Abel di esponenti $p = q = 1$, ma converge semplicemente per il criterio di Leibniz, poiché è una serie a segno alterno, in cui la successione $\frac{1}{(n+1)\log n}$ è monotona decrescente, in quanto reciproco del prodotto di due successioni crescenti e positive.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere effettuando la sostituzione $z = \cos(\log t)$, da cui $-dz = \frac{\sin(\log t)}{t}\,dt$, $z(1) = 1$, $z(\mathrm{e}^{\pi/4}) = \sqrt{2}/2$. Quindi ricaviamo

$$\int_1^{\mathrm{e}^{\pi/4}} \frac{\sin(\log t)}{t\cos^4(\log t)}\,dt = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{z^4}\,dz = \frac{1}{3z^3}\Big|_1^{\sqrt{2}/2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\,.$$

Esercizio 3

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Quest'ultima ha per soluzione $\lambda = 3$ con molteplicità 2; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2x\mathrm{e}^{3x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^{3x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{3x}(2x+3x^2)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{3x}(9x^2+12x+2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$A\mathrm{e}^{3x}(9x^2+12x+2) + A\mathrm{e}^{3x}(-12x-18x^2) + A\mathrm{e}^{3x}(9x^2) = 6\mathrm{e}^{3x} \quad\Longrightarrow\quad 2A = 6 \quad\Longrightarrow\quad A = 3\,.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2x\mathrm{e}^{3x} + 3x^2\mathrm{e}^{3x}$. Imponendo ora le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y(0) = C_1\,, \\ 0 = y'(0) = 3C_1 + C_2\,, \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} C_1 = 1\,, \\ C_2 = -3\,. \end{cases}$$

Concludendo, la soluzione del problema di Cauchy proposto è $y(x) = (1-3x+3x^2)\mathrm{e}^{3x}$.

Esercizio 4

Osserviamo che f è una funzione continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni continue ed è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0;\pm 2\}$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni derivabili. Inoltre, calcolando

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \mathrm{e}^{-1/4} = f(0)\,,$$

ricaviamo che f è continua anche nell'origine; pertanto, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Passiamo ora allo studio della derivabilità. Innanzitutto, osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^3} + 3 & \text{se } \mathrm{e}^{-1/x^2} > \mathrm{e}^{-1/4}, \text{ ovvero per } x < -2 \text{ oppure } x > 2; \\ -\frac{2\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^3} + 3 & \text{se } \mathrm{e}^{-1/x^2} > \mathrm{e}^{-1/4}, \text{ ovvero per } -2 < x < 0 \text{ oppure } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Calcolando

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^3} + 3\right) = 3\,, \qquad \lim_{x\to -2^\pm} f'(x) = \pm\frac{\mathrm{e}^{-1/4}}{4} + 3\,, \qquad \lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = \pm\frac{\mathrm{e}^{-1/4}}{4} + 3\,,$$

ricaviamo che f è derivabile nell'origine, mentre f' ha una salto nei punti $x = \pm 2$; pertanto $x = \pm 2$ sono punti angolosi. Osserviamo, infine, che nel primo limite abbiamo effettuato la sostituzione $t = 1/x^2$, da cui $x = 1/\sqrt{t}$, per $x > 0$, o $x = -1/\sqrt{t}$, per $x < 0$, ottenendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^3} = \lim_{t\to+\infty} \pm\frac{2t^{3/2}}{\mathrm{e}^t} = 0\,.$$

Esercizio 5

1) Per la definizione si veda il libro di testo.
2) Un possibile esempio è fornito dalla funzione $f(x) = |x-2|$.
3) Un possibile esempio è fornito dalla funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ (punto di cuspide) oppure $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (punto di flesso a tangente verticale).
4) L'affermazione è corretta, in quanto una funzione derivabile in x_0 è necessariamente continua in x_0, mentre la presenza di un punto di salto significa la presenza di un discontinuità.
5) Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, possiamo scrivere $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$, da cui si ottiene

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) + 1 - 4x}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) + 1 - 4x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{[f(0)+1] + [f'(0)-4]x + \frac{f''(0)}{2}x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{[f(0)+1] + [f'(0)-4]x}{x^2}\right] + \frac{f''(0)}{2}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, $f(0) = -1$, $f'(0) = 4$ e $\frac{f''(0)}{2} = 1$; ovvero lo sviluppo di Mc Laurin richiesto è

$$f(x) = -1 + 4x + x^2 + o(x^2)\,, \qquad \text{per } \ x \to 0\,.$$