SOLUZIONI COMPITO del 21/10/2016
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA - MECCANICA

Esercizio 1

L'equazione proposta si può riscrivere nella forma

$$z^6 = -32 - 32\sqrt{3}i \qquad \Longrightarrow \qquad z = \sqrt[6]{-32 - 32\sqrt{3}i}\,.$$

Posto $w = -32 - 32\sqrt{3}i = r\mathrm{e}^{i\theta}$, si ricava

$$r = \sqrt{(32)^2 + 3 \cdot (32)^2} = 32\sqrt{4} = 64\,, \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{32}{64} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{32\sqrt{3}}{64} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 4\pi/3\,.$$

Pertanto, dalla formula di calcolo delle radici n-esime di un numero complesso, otteniamo

$$z = \sqrt[6]{64\mathrm{e}^{(4\pi/3)i}} = \sqrt[6]{64}\mathrm{e}^{i\left(\frac{4\pi/3+2k\pi}{6}\right)} = 2\mathrm{e}^{i\left(\frac{4\pi+6k\pi}{18}\right)} = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{4\pi i/18} = 2\mathrm{e}^{2\pi i/9}\,; \\ 2\mathrm{e}^{10\pi i/18} = 2\mathrm{e}^{5\pi i/9}\,; \\ 2\mathrm{e}^{16\pi i/18} = 2\mathrm{e}^{8\pi i/9}\,; \\ 2\mathrm{e}^{22\pi i/18} = 2\mathrm{e}^{11\pi i/9}\,; \\ 2\mathrm{e}^{28\pi i/18} = 2\mathrm{e}^{14\pi i/9}\,; \\ 2\mathrm{e}^{34\pi i/18} = 2\mathrm{e}^{17\pi i/9}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a segno alterno, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Applicando il criterio del rapporto al valore assoluto del termine generale, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{(n+1)x}/(n+1)!}{3^{nx}/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{(n+1)x}n!}{3^{nx}(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{nx}3^{x}n!}{3^{nx}(n+1)n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^x}{n+1} = 0\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto, la serie proposta converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta si può riscrivere nella forma

$$f(x) = |-\cos^2 x - \cos x| = |\cos x(\cos x + 1)|\,.$$

Posto $g(x) = \cos x(\cos x + 1)$, osserviamo che

$$g(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in [0, \pi/2), \\ = 0 & \text{se } x = \pi/2; \pi, \\ < 0 & \text{se } x \in (\pi/2, \pi), \end{cases}$$

e

$$g'(x) = -2\cos x \sin x - \sin x = -\sin x(2\cos x + 1) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (2\pi/3, \pi), \\ = 0 & \text{se } x = 0; 2\pi/3; \pi, \\ < 0 & \text{se } x \in (0, 2\pi/3). \end{cases}$$

Tenendo conto che

$$0 \le f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [0, \pi/2), \\ 0 & \text{se } x = \pi/2; \pi, \\ -g(x) & \text{se } x \in (\pi/2, \pi), \end{cases}$$

si ricava che $x = \pi/2$ e $x = \pi$ sono punti di minimo assoluto. Poiché, invece, $f(0) = g(0) = 2$ e $f(2\pi/3) = -g(2\pi/3) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}$, si ricava che $x = 0$ è il punto di massimo assoluto mentre $x = 2\pi/3$ è il punto di massimo relativo.

Esercizio 4

Poiché il secondo membro dell'equazione differenziale proposta è definito solo per $x > 0$, dividendo ambo i membri per x, l'equazione si riscrive nella forma

$$y'(x) - 2y(x) = \mathrm{e}^{2x} \frac{\log^2 x}{x},$$

e risulta essere un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Poiché

$$\int (-2)\, dx = -2x\,, \qquad \int \left(\mathrm{e}^{2x} \frac{\log^2 x}{x} \right) \mathrm{e}^{-2x}\, dx = \int \frac{\log^2 x}{x}\, dx = \frac{\log^3 x}{3}\,,$$

dalla formula risolutiva otteniamo

$$y(x) = C\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x} \frac{\log^3 x}{3}\,.$$

Inserendo, infine, la condizione iniziale, otteniamo

$$2\mathrm{e}^2 = y(1) = C\mathrm{e}^2\,, \qquad \Longrightarrow \qquad C = 2\,.$$

Quindi, la soluzione cercata è $y(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x} \frac{\log^3 x}{3}$.

Esercizio 5

Osserviamo che, per le ipotesi fatte, $f(0) = f'(0) = 0$ e, per $x \to 0$, si ha $f(x)/x \to 0$ e $f'(x)/x \to 0$. Pertanto,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{f(x)}{x} - x \right] = 0 = g(0)\,.$$

Quindi g è continua nell'origine. Inoltre,

$$g'(0) \overset{\text{(se } \exists \text{ finito)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x^2}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - 2x}{2x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{f'(x)}{2x} - 1 \right] = -1\,,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato il Teorema dell'Hospital, in quanto ci troviamo davanti ad una forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Quindi g è derivabile nell'origine e $g'(0) = -1$.