SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$f'(x) = \frac{\cos(\log 2x)}{x} \; .$$

Esercizio 2

Dal teorema di riduzione degli integrali doppi e tenendo conto che l'insieme D è un rettangolo ed $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-y}$, si ottiene

$$\iint_D \mathrm{e}^{x-y}\, dx\, dy = \left(\int_0^1 \mathrm{e}^x\, dx\right)\left(\int_0^2 \mathrm{e}^{-y}\, dy\right) = (\mathrm{e}-1)(1-\mathrm{e}^{-2}) \; .$$

Esercizio 3

Ponendo $w = 3z - i$, l'equazione proposta diviene $w^2 = 1$; si tratta quindi di trovare le due radici complesse di 1, cioè $w_{1,2} = \pm 1$. Pertanto

$$z_1 = \frac{1+i}{3} \qquad z_2 = \frac{-1+i}{3} \; .$$

Esercizio 4

Ricordando che, per $t \to 0$, $\log(1+t) \sim t$, e ponendo $t = \mathrm{e}^{-7x}$ per $x \to +\infty$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log(1+\mathrm{e}^{-7x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{7x}} = 0 \; .$$

Esercizio 5

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; C.E. $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$f(x) > 0 \;\; \forall x > 0$; $f(x) < 0 \;\; \forall x < 0$;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1$; $y = 1$ è asintoto orizzontale a $+\infty$; $y = -1$ è asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$; $x = 0$ è asintoto verticale per f ;

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in$ C.E. .

Esercizio 6

Osserviamo che l'integrale proposto è un integrale improprio, pertanto bisogna studiare il comportamento della funzione in un intorno di 0^+. Si ottiene che in un intorno di 0^+

$$f(x) \sim \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{x}} & \text{se } \alpha < 0 \; ; \\ \frac{\pi}{4\sqrt{x}} & \text{se } \alpha = 0 \; ; \\ \frac{1}{x^{1/2-\alpha}} & \text{se } \alpha > 0 \; ; \end{cases}$$

pertanto l'integrale improprio esiste finito per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7

Ricordando che, per $t \to 0$, $\sqrt{1+t} \sim 1 + \frac{1}{2}t$ e ponendo $t = -2/n$, si ottiene

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2/n}}{n} \sim \frac{1 - (1 - 1/n)}{n} = \frac{1}{n^2} \ .$$

Pertanto, la serie proposta converge.

Domanda 1

Poiché $1/\log n$ è una successione monotona decrescente e infinitesima, si ottiene che $\inf E = 0$.

Domanda 2

$$\arccos[\cos(\frac{20}{6}\pi)] = \arccos[\cos(\frac{4}{3}\pi)] = \arccos[\cos(\frac{2}{3}\pi)] = \frac{2}{3}\pi \ .$$

Domanda 3

Data $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e posta $s_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n$, si dice che la serie converge ad $S \in I\!R$ se $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} s_N = S$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1
Utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$f'(x) = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} \ .$$

Esercizio 2
Dal teorema di riduzione degli integrali doppi e tenendo conto che l'insieme D è un rettangolo ed $f(x,y) = \mathrm{e}^{-3x} \cdot \mathrm{e}^{y}$, si ottiene

$$\iint_D \mathrm{e}^{y-3x} \ dx \ dy = \left(\int_{-1}^{2} \mathrm{e}^{-3x} \ dx \right) \left(\int_{1}^{3} \mathrm{e}^{y} \ dy \right) = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-6})(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}) \ .$$

Esercizio 3
Ponendo $w = 2i - z$, l'equazione proposta diviene $w^2 = -1$; si tratta quindi di trovare le due radici complesse di -1, cioè $w_{1,2} = \pm i$. Pertanto

$$z_1 = i \qquad z_2 = 3i \ .$$

Esercizio 4
Ricordando che, per $t \to 0$, $\log(1+t) \sim t$, e ponendo $t = \mathrm{e}^{4x}$ per $x \to -\infty$, si ottiene

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^{-8}}{\log(1 + \mathrm{e}^{4x})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^{-4x}}{x^8} = +\infty \ .$$

Esercizio 5
$f(x) = -\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{2x}$; $\qquad$ C.E. $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$f(x) > 0 \ \ \forall x < 0$; $\qquad f(x) < 0 \ \ \forall x > 0$;

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ è asintoto orizzontale a $+\infty$; $\quad y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ è asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim\limits_{x \to 0^\pm} f(x) = \mp\infty$; $\qquad x = 0$ è asintoto verticale per f ;

$f'(x) = \dfrac{3}{2x^2\sqrt{2x^2+3}}$; $\qquad f'(x) > 0 \ \ \forall x \in$ C.E. .

Esercizio 6
Osserviamo che l'integrale proposto è un integrale improprio, pertanto bisogna studiare il comportamento della funzione in un intorno di 0^+. Si ottiene che in un intorno di 0^+

$$f(x) \sim \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{x}} & \text{se } \alpha < 0 \ ; \\ \frac{1}{x^{1/2 - 2/\alpha}} & \text{se } \alpha > 0 \ ; \end{cases}$$

pertanto l'integrale improprio esiste finito per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 7

Ricordando che, per $t \to 0$, $\sqrt{1+t} \sim 1 + \frac{1}{2}t$ e ponendo $t = 3/n^3$, si ottiene

$$\frac{1}{n\left(\sqrt{1+3/n^3}-1\right)} \sim \frac{1}{n\left(1+3/2n^3-1\right)} = \frac{2}{3}n^2 \ .$$

Pertanto, la serie proposta diverge.

Domanda 1

Poiché e^{-n} è una successione monotona decrescente, si ottiene che $\sup E = \max E = 1/\mathrm{e}$.

Domanda 2

$$\arcsin[\sin(\frac{14}{5}\pi)] = \arcsin[\sin(\frac{4}{5}\pi)] = \arcsin[\sin(\frac{1}{5}\pi)] = \frac{1}{5}\pi \ .$$

Domanda 3

Data $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e posta $s_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n$, si dice che la serie diverge a $+\infty$ se $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} s_N = +\infty$.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

Utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$f'(x) = \frac{2x\cos(x^2)}{\sin(x^2)} \ .$$

Esercizio 2

Dal teorema di riduzione degli integrali doppi e tenendo conto che l'insieme D è un rettangolo ed $f(x,y) = \mathrm{e}^{4x} \cdot \mathrm{e}^{3y}$, si ottiene

$$\iint_D \mathrm{e}^{4x+3y}\ dx\ dy = \left(\int_3^5 \mathrm{e}^{4x}\ dx\right)\left(\int_1^6 \mathrm{e}^{3y}\ dy\right) = \frac{1}{12}(\mathrm{e}^{20} - \mathrm{e}^{12})(\mathrm{e}^{18} - \mathrm{e}^{3}) \ .$$

Esercizio 3

Ponendo $w = 2i+3z$, l'equazione proposta diviene $w^2 = -1$; si tratta quindi di trovare le due radici complesse di -1, cioè $w_{1,2} = \pm i$. Pertanto

$$z_1 = -\frac{i}{3} \qquad z_2 = -i \ .$$

Esercizio 4

Ricordando che, per $t \to 0$, $\log(1+t) \sim t$, e ponendo $t = \mathrm{e}^{5x}$ per $x \to -\infty$, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{-4}}{\log(1+\mathrm{e}^{5x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-5x}}{x^4} = +\infty \ .$$

Esercizio 5

$f(x) = -\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{2x}$; C.E. $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$f(x) > 0 \ \ \forall x < 0$; $f(x) < 0 \ \ \forall x > 0$;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp 1$; $y = -1$ è asintoto orizzontale a $+\infty$; $y = 1$ è asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \mp\infty$; $x = 0$ è asintoto verticale per f ;

$f'(x) = \dfrac{1}{2x^2\sqrt{4x^2+1}}$; $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in$ C.E. .

Esercizio 6

Osserviamo che l'integrale proposto è un integrale improprio, pertanto bisogna studiare il comportamento della funzione in un intorno di 0^+. Si ottiene che in un intorno di 0^+

$$f(x) \sim \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt[3]{x}} & \text{se } \alpha < 0 \ ; \\ \frac{1}{x^{1/3-1/2\alpha}} & \text{se } \alpha > 0 \ ; \end{cases}$$

pertanto l'integrale improprio esiste finito per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 7

Ricordando che, per $t \to 0$, $\sqrt{1+t} \sim 1 + \frac{1}{2}t$ e ponendo $t = 7/n^4$, si ottiene

$$\frac{1}{n^2\left(\sqrt{1+7/n^4}-1\right)} \sim \frac{1}{n^2(1+7/2n^4-1)} = \frac{2}{7}n^2 \; .$$

Pertanto, la serie proposta diverge.

Domanda 1

Poiché e^{-n} è una successione monotona decrescente e infinitesima, si ottiene che $\inf E = 0$.

Domanda 2

$$\arcsin[\sin(\frac{27}{5}\pi)] = \arcsin[\sin(\frac{7}{5}\pi)] = \arcsin[\sin(-\frac{2}{5}\pi)] = -\frac{2}{5}\pi \; .$$

Domanda 3

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e posta $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, si dice che la serie diverge a $-\infty$ se $\lim_{N\to+\infty} s_N = -\infty$.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1
Utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$f'(x) = \frac{2\cos(\log x^2)}{x} \ .$$

Esercizio 2
Dal teorema di riduzione degli integrali doppi e tenendo conto che l'insieme D è un rettangolo ed $f(x,y) = \mathrm{e}^{3x} \cdot \mathrm{e}^{-2y}$, si ottiene

$$\iint_D \mathrm{e}^{3x-2y}\ dx\ dy = \left(\int_0^2 \mathrm{e}^{3x}\ dx\right)\left(\int_{-1}^4 \mathrm{e}^{-2y}\ dy\right) = \frac{1}{6}(\mathrm{e}^6 - 1)(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-8}) \ .$$

Esercizio 3
Ponendo $w = 4z + 2i$, l'equazione proposta diviene $w^2 = 1$; si tratta quindi di trovare le due radici complesse di 1, cioè $w_{1,2} = \pm 1$. Pertanto

$$z_1 = \frac{1-2i}{4} \qquad z_2 = -\frac{1+2i}{4} \ .$$

Esercizio 4
Ricordando che, per $t \to 0$, $\log(1+t) \sim t$, e ponendo $t = \mathrm{e}^{-3x}$ per $x \to +\infty$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} x^6 \log(1 + \mathrm{e}^{-3x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{\mathrm{e}^{3x}} = 0 \ .$$

Esercizio 5

$f(x) = 2\dfrac{\sqrt{x^2+6}}{x}$; C.E. $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$f(x) > 0 \ \ \forall x > 0$; $f(x) < 0 \ \ \forall x < 0$;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 2$; $y = 2$ è asintoto orizzontale a $+\infty$; $y = -2$ è asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$; $x = 0$ è asintoto verticale per f ;

$f'(x) = -\dfrac{12}{x^2\sqrt{x^2+6}}$; $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in$ C.E. .

Esercizio 6
Osserviamo che l'integrale proposto è un integrale improprio, pertanto bisogna studiare il comportamento della funzione in un intorno di 0^+. Si ottiene che in un intorno di 0^+

$$f(x) \sim \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{x}} & \text{se } \alpha < 0 \ ; \\ \frac{\pi}{4\sqrt{x}} & \text{se } \alpha = 0 \ ; \\ \frac{1}{x^{1/2-3\alpha/5}} & \text{se } \alpha > 0 \ ; \end{cases}$$

pertanto l'integrale improprio esiste finito per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7

Ricordando che, per $t \to 0$, $\sqrt{1+t} \sim 1 + \frac{1}{2}t$ e ponendo $t = -5/n^3$, si ottiene

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 5/n^3}}{\sqrt{n}} \sim \frac{1 - (1 - 5/2n^3)}{\sqrt{n}} = \frac{5}{2n^{7/2}} \ .$$

Pertanto, la serie proposta converge.

Domanda 1

Poiché $1/\log n$ è una successione monotona decrescente, si ottiene che $\sup E = \max E = \frac{1}{\log 2}$.

Domanda 2

$$\arccos[\cos(\frac{21}{4}\pi)] = \arccos[\cos(\frac{5}{4}\pi)] = \arccos[\cos(\frac{3}{4}\pi)] = \frac{3}{4}\pi \ .$$

Domanda 3

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e posta $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, si dice che la serie è non regolare se la successione delle somme parziali $\{s_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ è non regolare.