SOLUZIONI COMPITO del 22/03/2019
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo per ogni $x \in \mathbb{R}$; possiamo quindi procedere utilizzando, ad esempio, il criterio della radice. In tal caso otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{[\log(1+3|x-1|)]^n}{4^n(2n+3)(n+1)}} \sim \frac{\log(1+3|x-1|)}{4\sqrt[n]{2n\cdot n}} \to \frac{\log(1+3|x-1|)}{4}\,.$$

Pertanto, la serie risulterà essere convergente se $\log(1+3|x-1|) < 4$, ovvero per $1+3|x-1| < \mathrm{e}^4$, che fornisce $1-(\mathrm{e}^4-1)/3 < x < 1+(\mathrm{e}^4-1)/3$, e sarà, invece, divergente per $x < 1-(\mathrm{e}^4-1)/3$ e $x > 1+(\mathrm{e}^4-1)/3$. Infine, per $x = 1 \pm (\mathrm{e}^4-1)/3$, il criterio non fornisce alcuna informazione, ma sostituendo nel termine generale della serie otteniamo $a_n = \frac{1}{(2n+3)(n+1)} \sim \frac{1}{2n^2}$, che fornisce una serie convergente, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.
In conclusione, la serie proposta convergerà se e solo se $1-(\mathrm{e}^4-1)/3 \le x \le (\mathrm{e}^4-1)/3$.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere effettuando la sostituzione $t = \cos(2x^3)$, da cui $-\frac{1}{6}\,dt = x^2\sin(2x^3)\,dx$, $t(\sqrt[3]{\pi/2}) = -1$, $t(\sqrt[3]{2\pi/3}) = -1/2$. Quindi ricaviamo

$$\int_{\sqrt[3]{\pi/2}}^{\sqrt[3]{2\pi/3}} \frac{x^2\sin(2x^3)}{3-\cos(2x^3)}\,dx = -\frac{1}{6}\int_{-1}^{-1/2}\frac{1}{3-t}\,dt = \frac{1}{6}\log(3-t)\Big|_{-1}^{-1/2} = \frac{1}{6}[\log(7/2)-\log 4] = \log\sqrt[6]{(7/8)}\,.$$

Esercizio 3

Poiché l'arcotangente e il polinomio x^2+1 sono funzioni definite su tutto l'asse reale, l'unica condizione da imporre affinché f sia definita è che il denominatore non si annulli, ovvero $x \neq 0; 1$. Quindi $C.E. = (-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$. Inoltre,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\pi/2}{x^2} = \pi/2\,,$$
$\Longrightarrow$ $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$;
$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} -\frac{x(x-4)}{x} = \lim_{x\to 0^\pm}\frac{4x}{x} = 4\,,$$
$\Longrightarrow$ quindi $x = 0$ è un punto in cui f è prolungabile con continuità;
$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm}\frac{2\arctan(-3)}{x-1} = \mp\infty\,,$$
$\Longrightarrow$ $x = 1$ è asintoto verticale per $x \to 1^\pm$.

Osserviamo che nel secondo limite abbiamo utilizzato il fatto che $\arctan y \sim y$, per $y \to 0$, con $y = x(x-4)$. Alternativamente, si può utilizzare il Teorema di de L'Hospital.

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2+4\lambda = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 0; -4$; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-4x}$. Utilizzando, inoltre, il metodo di somiglianza, si ricava subito che una soluzione particolare è $y_p(x) = 2x$, pertanto l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-4x} + 2x$. Imponendo, ora, le condizioni richieste, si ricava

$$C_1 + C_2/4 + 2\log\sqrt{2} = y(\log\sqrt{2}) = y(-\log\sqrt{2}) = C_1 + 4C_2 - 2\log\sqrt{2} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} C_1 \in \mathbb{R}\,,\\ C_2 = (8/15)\log 2\,. \end{cases}$$

Quindi, ci saranno infinite soluzioni del problema proposto, date da

$$y(x) = C_1 + \left(\frac{8}{15}\log 2\right)\mathrm{e}^{-4x} + 2x\,, \qquad \forall\, C_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione, si veda il libro di testo.

ii) Ovviamente, poiché $f, g \in \mathcal{C}^0([2, +\infty))$, tutti gli intgrali impropri proposti devono essere studiati solo per $x \to +\infty$. Tenendo conto di tale osservazione, si ricava che l'unica affermazione corretta è la C), in quanto dalle ipotesi abbiamo

$$\frac{f(x)g(x)}{x} = \frac{f(x)}{(1/x)}\,(1/x)\,\frac{g(x)}{x} \leq \frac{1}{x^2}\,,$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo utilizzato il fatto che, per $x \to +\infty$, $f(x)/(1/x) \to 0$, in quanto $f(x) = o(1/x)$, e $g(x) \to 0$; pertanto, $f(x)/(1/x) \leq 1$ e $g(x) \leq 1$, definitivamente. Quindi, per il criterio del confronto con l'iperbole di esponente $2 > 1$, l'integrale improprio converge. Invece, tutte le altre affermazioni sono false. Infatti, prendendo, ad esempio,

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\log x}} = o(1/x) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{\log x}} \to 0\,,$$

si ottiene che la A) è falsa in quanto

$$\int_2^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\log x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log x}}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = +\infty\,.$$

Prendendo $f(x) = 1/x^3 = o(1/x)$ e $g(x) = 1/x \to 0$, si ricava che B) è falsa, in quanto

$$\int_2^{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1/x^3}{1/x}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{che è convergente}\,.$$

Infine, prendendo $f(x) = 1/x^2 = o(1/x)$ e $g(x) = 1/x \to 0$, si ricava che la D) è falsa, in quanto

$$\int_2^{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1/x^2}{1/x}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty\,.$$