SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

a) Effettuando un cambiamento in coordinate polari, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r\cos^3\theta = 0 = f(0,0)\,,$$

indipendentemente da θ. Pertanto, la funzione è continua nell'origine.

b)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^3}{t^2}\cdot\dfrac{1}{t} = 1\,, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{t^2}\cdot\dfrac{1}{t} = 0\,. \end{cases}$$

c) Effettuando nuovamente un cambiamento in coordinate polari, si ottiene

$$\begin{aligned} &\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{h^3}{h^2+k^2}-h\right)\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3-h^3-hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = -\lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^3} \neq 0\,. \end{aligned}$$

Pertanto, f NON è differenziabile nell'origine.

Esercizio 2

Poiché la funzione proposta è pari, essa si svilupperà nella sola serie dei coseni. In particolare, si otterrà:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{2}\,dx\right) = \frac{3}{4}\pi \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\cos nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\,\cos nx\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2}\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right) \qquad \forall n\geq 1\,. \end{aligned}$$

Infine, tenendo conto che $a_n \neq 0$ solo se $n = 4k+2$ ed in tal caso vale $-\frac{4}{\pi(4k+2)^2}$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{3}{8}\pi - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+2)^2}\,\cos\big((4k+2)x\big)\,.$$