SOLUZIONI COMPITO 22.07.05

Esercizio 1

a) Utilizzando il criterio di D'Alembert, si ottiene

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{(n+2)\log(n+1)} \cdot \frac{(n+1)\log n}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e} \qquad \Longrightarrow \qquad R = 1/\mathrm{e}\,;$$

pertanto il cerchio di convergenza è dato da $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z-i| < 1/\mathrm{e}\}$.

b) Dal teorema di convergenza delle serie di potenze si ha che, per ogni $\delta > 0$, la serie proposta converge totalmente nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z-i| < 1/\mathrm{e} - \delta\}$. D'altra parte, per $|z-i| = 1/\mathrm{e}$, si ricava che la serie non converge assolutamente (per confronto con la serie $\sum \frac{1}{n\log n}$) e quindi non si può avere neppure convergenza totale fino al bordo.

c) Ponendo $w = \mathrm{e}(z-i)$, la serie proposta si riscrive nella forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\log n}\; w^n$$

e risulta avere raggio di convergenza $R_w = 1$. Poiché, in tal caso, la successione dei coefficienti $a_n := \frac{1}{(n+1)\log n}$ risulta essere infinitesima e monotona decrescente (essendo il reciproco di una successione crescente), si ottiene che la serie proposta converge semplicemente per $|w| = 1$, tranne al più nel punto $w = 1$. Sostituendo tale punto, si osserva che, di nuovo per confronto con la serie $\sum \frac{1}{n\log n}$, non vi è convergenza e quindi la serie proposta converge sul bordo solo per $|z-i| = 1/\mathrm{e}$ con $z \neq i + 1/\mathrm{e}$.

Esercizio 2

L'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine di Eulero, che si può quindi riscrivere nella forma

$$z''(t) + z'(t) = 10(\mathrm{e}^t + 1) \qquad \text{dove} \qquad t = \log x\,.$$

L'equazione caratteristica ad essa associata è data da $\lambda^2 + \lambda = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 0, -1$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da $z_o(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-t}$. A sua volta, la soluzione particolare sarà della forma $z_{p_1}(t) + z_{p_2}(t)$ dove $z_{p_1}(t) = A\mathrm{e}^t$ e $z_{p_2}(t) = Bt$. Sostituendo nell'equazione differenziale, si perviene alle equazioni

$$A\mathrm{e}^t + A\mathrm{e}^t = 10\mathrm{e}^t \qquad \text{e} \qquad B = 10$$

da cui $A = 5$ e $B = 10$, ovvero $z_p(t) = 5\mathrm{e}^t + 10t$ e quindi $z(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-t} + 5\mathrm{e}^t + 10t$. Risostituendo $t = \log x$, si ottiene $y(x) = C_1 + C_2/x + 5x + 10\log x$. Imponendo infine le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{cases} 1 = y(2) = C_1 + C_2/2 + 10 + 10\log 2 \\ 1 = y'(2) = -C_2/4 + 5 + 10/2 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} C_1 = -27 - 10\log 2 \\ C_2 = 36 \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione richiesta sarà

$$(*) \qquad y(x) = -27 - 10\log 2 + \frac{36}{x} + 5x + 10\log x\,,$$

che risulta essere definita per $x \in (0, +\infty)$.

In alternativa, ponendo $u(x) = y'(x)$, l'equazione proposta si può ricondurre all'equazione lineare del primo ordine non omogenea $x^2u'(x) + 2xu(x) = 10(x+1)$. Imponendo $x \neq 0$, dividendo tale equazione per x^2 ed utilizzando la formula risolutiva delle equazioni lineari del primo ordine, si ricava

$$u(x) = \frac{C}{x^2} + 5 + \frac{10}{x}\,.$$

A questo punto, integrando u ed imponendo le condizioni iniziali, si riottiene la soluzione $y(x)$ trovata in $(*)$.

Esercizio 3

Osserviamo innanzitutto che l'insieme T non è altro che la porzione del cerchio di centro l'origine e raggio unitario, posta nel primo quadrante, tra l'asse x e la bisettrice. Effettuando un cambiamento in coordinate polari, si ottiene

$$\iint_T \frac{y}{x}\,\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\left(\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta\right)\,dr$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta\right) = \left(\frac{1}{2}\log(1+r^2)\Big|_0^1\right)\left(-\log|\cos\theta|\Big|_0^{\pi/4}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\log 2\cdot\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\log 2\cdot\log\sqrt{2} = \frac{(\log 2)^2}{4}\,.$$

Esercizio 4

a) Ponendo $z = x+iy$ ed $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, si ottiene

$$f(z) = 2x^2 - 2ixy \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} u(x,y) = 2x^2 \\ v(x,y) = -2xy \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} u_x = 4x \neq -2x = v_y \\ u_y = 0 \neq 2y = v_x\,. \end{cases}$$

Poiché non sono mai soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann, f non è olomorfa in nessun aperto di $\mathbb{C}$.

b) i) La cubica di equazione $y = x^3$, può essere parametrizzata da $x = t$, $y = t^3$ con $t \in [1,2]$; pertanto l'integrale richiesto sarà dato da

$$\int_1^2 (2t^2 - 2itt^3)(1+3it^2)\,dt = \int_1^2 (2t^2 + 6t^6 + 4it^4)\,dt = \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{6}{7}t^7 + \frac{4}{5}it^5\right)\Big|_1^2 = \frac{2384}{21} + \frac{124}{5}i\,.$$

ii) Il segmento di equazione $y = 7x-6$, può essere parametrizzato da $x = t$, $y = 7t-6$ con $t \in [1,2]$; pertanto l'integrale richiesto sarà dato da

$$\int_1^2 [2t^2 - 2it(7t-6)](1+7i)\,dt = \int_1^2 (-84t + 100t^2 + 12it)\,dt = \left(-42t^2 + \frac{100}{3}t^3 + 6it^2\right)\Big|_1^2 = \frac{322}{3} + 18i\,.$$