CALCOLO DIFF. e INT./A appello del 23 marzo 2006	cognome e nome firma

1. Studiare la natura dei punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)\,,$$

nell'insieme $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$.

---

2. Sia assegnata, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{3n^{2\alpha}+1}\,.$$

(1) Studiare la convergenza assoluta e semplice per $\alpha = 1/2$.
(2) Studiare la convergenza assoluta e semplice per $\alpha \ge 1$.

---

3. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2y^2(x)+2}{x^2-3x+2}\,, \\ \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

---

4. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{(x-\alpha)^{4/3}}\,.$$

(1) Stabilire se tale integrale è finito per $\alpha < 0$.
(2) Stabilire se tale integrale è finito per $\alpha = 0$.
(3) Stabilire se tale integrale è finito per $\alpha > 0$.

---

5. Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \log\left(\mathrm{e} + \frac{1}{x^2}\right)\,.$$

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e convessa. Verificare, giustificando la risposta, che la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x \log(1+t^2) f''(t)\,dt$$

è non decrescente.

Tempo:
3 ore

CALCOLO DIFF. e INT./B appello del 23 marzo 2006	cognome e nome firma

1. Studiare la natura dei punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y)\,,$$

nell'insieme $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

---

2. Sia assegnata, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n^\alpha}\,.$$

(1) Studiare la convergenza assoluta e semplice per $\alpha = 1$.
(2) Studiare la convergenza assoluta e semplice per $\alpha \ge 2$.

---

3. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{6y^2(x)+6}{x^2-5x+4}\,, \\ \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

---

4. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x-\alpha)^{6/5}}\,.$$

(1) Stabilire se tale integrale è finito per $\alpha < 0$.
(2) Stabilire se tale integrale è finito per $\alpha = 0$.
(3) Stabilire se tale integrale è finito per $\alpha > 0$.

---

5. Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2} \log\left(\mathrm{e} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)\,.$$

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e concava. Verificare, giustificando la risposta, che la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x \log(1+t^2) f''(t)\,dt$$

è non crescente.

Tempo:
3 ore